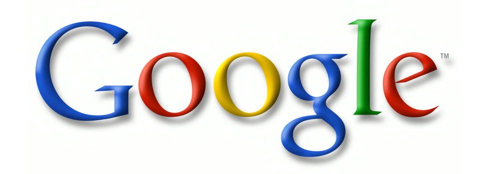
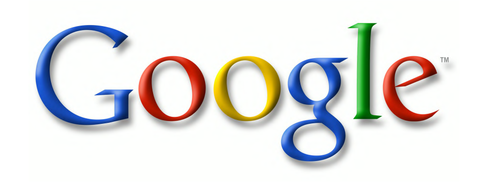
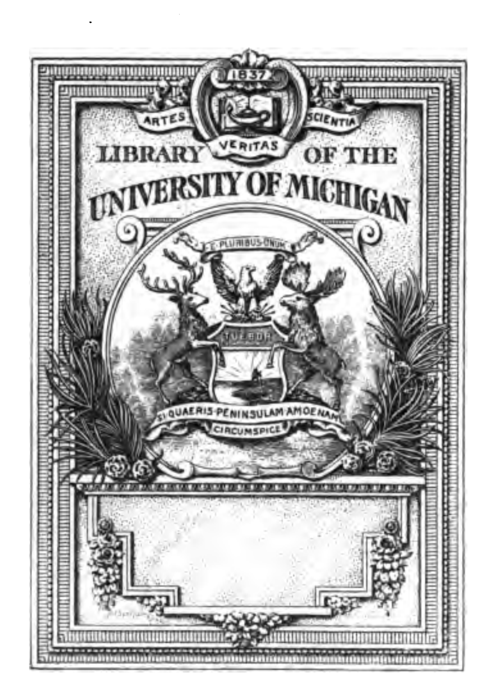





1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

Lucien LÉVY
Agrégé des sciences mathématiques, Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

3e SÉRIE

TOME DEUXIÈME

Année 1888.



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1888

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

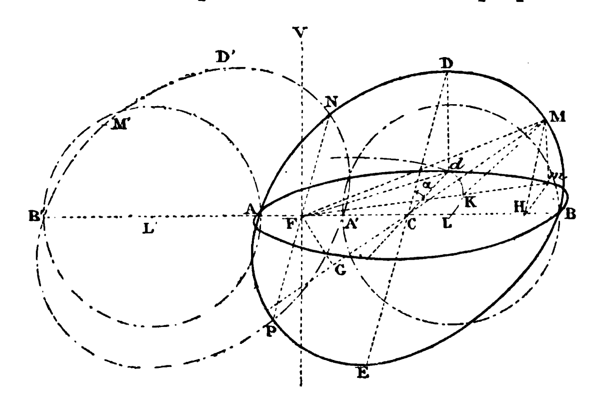
SECTIONS CIRCULAIRES DU TORE

(DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME DE VILLARCEAU)

Par M. **V. Salson.**

Théorème. — *Étant donnés : un cercle* ADB *et sa projection* AdB *sur un plan quelconque; la surface engendrée par ce cercle, en tournant autour de la perpendiculaire* FV *menée au plan de projection* AdB, *par le foyer* F *de cette projection, est un tore.*

Le plan de projection passe par le centre C du cercle donné, AB est sa trace sur le plan de ce cercle, CD est perpendiculaire

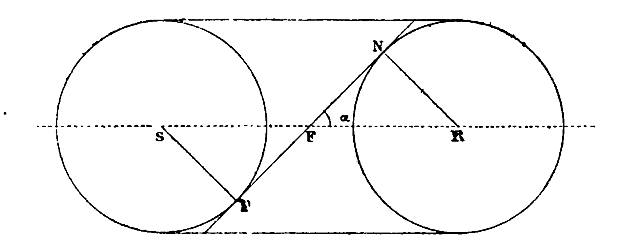


sur ABil , en est de même de C*d*. On sait (théorème de M. Courcelles) que la projection du cercle est une ellipse dont le point F, distant du centre d'une longueur FC égale à D*d*, est un des foyers.

Soient M un point du cercle donné, m la projection de ce point. Menons mH perpendiculaire à BA et traçons la droite MH, cette dernière sera perpendiculaire à BA. Menons MC, puis abaissons, du foyer F, une perpendiculaire FG sur cette ligne. Traçons mF et prenons, sur cette droite, une longueur Fk = Fd = CD = CM = CA, et décrivons, du point F comme centre, un cercle dKL ayant cette longueur pour rayon. Traçons enfin MK. M. Courcelles démontre que FG = Mm et que les triangles rectangles FGM, MmF sont égaux. Les angles aigus MFm, FMG sont donc égaux; par conséquent les triangles MFK, MFC ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun; savoir : MF commun, FK = CM par construction; ces triangles sont donc égaux et l'on a : MK = FC = Dd.

Un point quelconque M du cercle ADB se trouve donc sur le tore dont la section méridienne VFKmM a pour rayon la demi-distance focale MK, et, pour centre le point K du cercle dKL égal au cercle générateur ADB. Pour démontrer que le cercle donné ADB engendre entièrement le tore ainsi défini, et seulement ce tore, il suffit d'observer que les différents points du cercle engendrent tous les parallèles et rien que les parallèles compris entre l'équateur décrit par le point B, le collier décrit par le point A, et les parallèles moyens décrits par les points D et E les plus éloignés du plan de l'équateur.

Remarques. — I. La section du tore par le plan du cercle générateur ADB est symétrique par rapport à la trace PN, sur



le plan sécant, du méridien perpendiculaire à ce plan. Un parallèle quelconque du tore rencontre le plan sécant en un

point M du cercle générateur et au point symétrique M' : ce parallèle ne peut avoir avec le plan d'autre point commun. Donc la section du tore, par le plan du cercle générateur, se compose des cercles ADB, A'D'B' symétriques par rapport à PN.

II. Le plan du cercle générateur est bi-tangent au tore, aux points N, P, situés dans le méridien de symétrie

III (Théorème de Villarceau). *Tout plan bi-tangent au tore* se confond avec le plan du cercle générateur et *coupe* par conséquent *la surface suivant deux cercles.*

Considérons *(fig. 2)* les sections du tore et du plan bi-tangent par le méridien perpendiculaire à ce plan. Soient N, P, les contacts de la trace du plan bi-tangent, avec la trace du tore. Le triangle rectangle FNR est égal au triangle rectangle D*d*C de la *fig.* (1); car CD = FL = FR, D*d* = LB = RN. Donc les angles DC*d*, RFN sont égaux; et le plan bi-tangent se confond avec le plan du cercle générateur puisqu'il fait, avec le plan de l'équateur, le même angle α que ce dernier. Donc le plan bi-tangent PN coupe le tore suivant les deux cercles A*d*B, A'B'D' égaux au lieu des centres des sections méridiennes.

EXERCICES GÉOMÉTRIQUES

Par M. **A. Fitz-Patrick.**

---

1. — *Étant données quatre droites* AB, BC, CD, DE *qui forment une ligne brisée concave, on demande de les couper par une sécante* xy, *telle que les segments interceptés* MN, NP, PQ *soient égaux entre eux.*

Prolongeons DC jusqu'à sa rencontre, en G, avec AB; puis par les points N menons les parallèles NF, QH à DC.

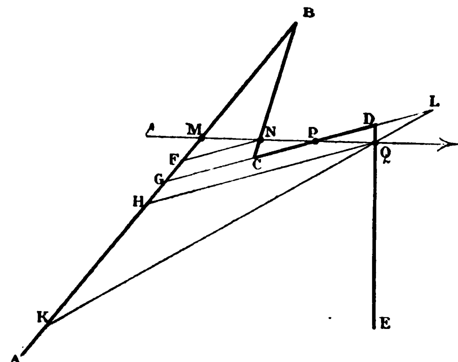
On a PG = 2NF, QH = 3NF.

Cela posé, prenons GK = GB, et traçons la droite KQ; celle-ci, prolongée, coupe DC en L.

Les triangles semblables GKL, HKQ nous donnent

$$\frac{GL}{HQ} = \frac{GK}{HK}.$$

Mais : $HQ = 3NF$, $GK = BG$, $HK = BF$;



et, par suite,

$$\frac{GL}{3FN} = \frac{BG}{BF} = \frac{GC}{NF};$$

d'où $GL = 3GC$.

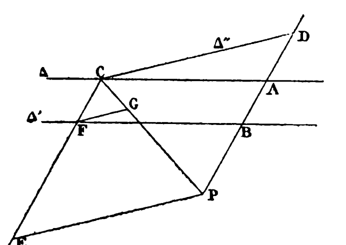
Le point L est donc déterminé sur DC.

En joignant les points K et L on a Q; le point H est alors déterminé.

Ce dernier point étant connu, on obtient F en portant $GF = GH$, et en menant, par F, FN parallèle à DC; on détermine, ainsi, un second point N de la sécante cherchée.

2. — *Étant données deux droites parallèles* Δ, Δ', *une troisième droite* Δ'' *qui coupe* Δ *en* C, *et un point* P *dans leur plan, on demande de mener, par* P, *une transversale coupant les trois droites* Δ, Δ', Δ'' *en des points* A, B *et* D, *tels que le rapport de* AB *à* PD *soit égal à un rapport donné* $\frac{m}{n}$.

Par les points C, P, menons des droites parallèles à PD et à Δ'', droites qui se coupent en un point E.



Soit F le point où CE coupe Δ'. Menons PC; et, par F, traçons FG parallèle à Δ''.

On a

$$\frac{CG}{CP} = \frac{CF}{CE} = \frac{AB}{PD} = \frac{m}{n}.$$

On peut donc déterminer le point G sur PC.

Le problème s'achève alors facilement.

VARIÉTÉS

LES TÉLÉMÈTRES OU TÉLOMÈTRES

Par M. **Louis Liège d'Iray,** lieutenant d'Artillerie.

Le principe général qui sert de base à ces instruments peut s'énoncer ainsi : on considère un triangle, et, le plus ordinairement, un triangle rectangle dont un côté constitue une base invariable, mesurée avec soin; les instruments font connaître la grandeur de l'angle à la base.

Au point de vue de l'artillerie, ces petits appareils sont d'un intérêt médiocre et purement théorique. L'un d'eux, le télomètre Goulier, est réglementaire; et il existe dans toutes les batteries d'artillerie de campagne; mais pas un seul n'est employé pratiquement et, pour divers motifs, on a renoncé à se servir du télomètre.

Pour donner une évaluation toujours médiocre de la distance, le télomètre exige une manipulation trop longue, et trop minutieuse, pour être vraiment pratique. Il y a incontestablement économie de temps à évaluer approximativement la distance à vue, en s'entourant de quelques précautions; puis, à ouvrir le feu sans retard. Un très petit nombre de coups suffisent pour rectifier par le réglage l'erreur commise sur la distance; de plus, on a l'avantage d'avoir fait du bruit le premier, ce qui n'est pas sans profit, au point de vue du moral. Avec l'usage du télomètre, on risque de voir le tir de l'ennemi réglé sur la batterie, avant que celle-ci ait tiré son premier coup.

Dans le tir de place (tir concentrique par exemple) on élude la recherche de la distance, en employant directement au calcul de l'angle de tir qui convient et de la direction à donner à la pièce, les données qui pourraient servir à l'évaluer. Il est évident en effet que si, d'une part, la distance est fonction de certaines mesures angulaires; si, d'autre part, les élé-

ments du tir (orientation et inclinaison de l'axe de la pièce) sont fonctions de la distance, de sorte que les éléments du tir sont fonctions des mesures angulaires. Il y a donc intérêt à éliminer, pour ainsi dire, la distance qui n'est pas, *par elle-même*, intéressante à connaître. On conçoit alors que des calculs, faits d'avance, ou des constructions graphiques, préparées une fois pour toutes, puissent donner le résultat, pour ainsi dire directement, du moins dans le cas où la pièce qui tire occupe un emplacement fixe et où les postes d'observation, d'où sont faites les mesures d'angles, sont des points invariables.

L'opération qui consiste à mesurer les distances est également supprimée dans le tir de côte. L'altitude de la batterie étant connue, les éléments du tir sont fonction de l'angle de dépression seulement; et on a même là des appareils de visées dans lesquels certains profils d'excentriques sont calculés suivant les propriétés balistiques de la pièce, ce qui permet de tirer directement, sans autre manipulation que celle qui amène le but dans le champ du viseur. Du même coup, en effet, la pièce se trouve dirigée de façon à atteindre l'objectif. L'appareil Deport, auquel nous faisons allusion ici, est curieux au point de vue mécanique; mais on peut dire, d'une façon générale, que l'emploi des télémètres et télomètres est actuellement, de l'histoire ancienne, au point de vue militaire. Ils sont décrits dans les cours, comme représentant des tentatives faites en vue de l'artillerie; mais on considère, généralement, qu'il n'existe pas encore de solution satisfaisante de ce problème. Aussi, pratiquement, la difficulté est plutôt tournée que résolue.

Cependant, il n'est pas douteux que, pour l'artillerie de campagne principalement, un appareil qui demanderait *très peu de temps* à employer et donnerait une grande précision *sans manipulation trop minutieuse*, serait *extrêmement* précieux.

Quoi qu'il en soit, voici une description sommaire des principaux télémètres et télomètres.

Télomètre Goulier. — Soit P le point inaccessible dont on veut mesurer la distance au point A; soit d cette distance

inconnue. Supposons deux observateurs placés en A et B. Si l'angle A est droit il suffira de mesurer α pour en conclure D, la distance AB étant connue.

Il faut donc, en A, un appareil permettant de faire deux visées rectangulaires (appareil A). L'une de ces visées sera dirigée sur P; l'observateur B ira se placer sur le prolongement de l'autre. En B, il faudra un appareil permettant de viser à la fois A et P, c'est-à-dire un appareil donnant deux visées à angle variable, cet angle différant d'ailleurs peu de l'angle droit (appareil B).

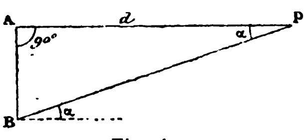


Fig. 1.

AB ayant une longueur fixe (pratiquement 40 mètres), *d* est simplement une fonction de α. Si donc la vis de rappel, qui permet de faire varier α, fait mouvoir en même temps une réglette convenablement graduée en distances, en face d'un repère, une simple lecture donnera *d*.

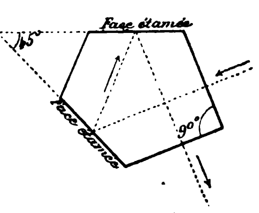
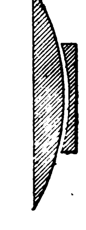


Fig. 2.

Appareil A. — Il comprend un voyant pour que B puisse le viser avec précision, et un viseur dont le champ est divisé en deux parties. La partie supérieure reçoit directement les rayons émanés du point sur lequel est dirigé le viseur. La partie inférieure reçoit des rayons sortant d'un prisme à réflexion totale après y avoir subi une déviation égale à 90°. Ce prisme est placé dans l'intérieur du viseur, et ses deux faces rectangulaires correspondent à deux ouvertures pratiquées dans l'enveloppe.

Appareil B. — Même principe que l'appareil A dont il est symétrique, sauf que, pour rendre variable l'angle des deux visées, on interpose, sur le trajet des rayons directs, un prisme à angle variable composé de deux lentilles; l'une, plan-convexe; l'autre, plan-concave de même rayon. Dans la position ci-contre, les faces planes sont parallèles ainsi que les faces courbes : c'est donc une glace à faces parallèles. Au contraire,


Fig. 3.

si l'on déplace l'une d'elles perpendiculairement à la direction de la visée, c'est-à-dire de manière que l'axe optique reste parallèle à lui-même, le système formé par les deux lentilles devient équivalent à un prisme dont l'angle varie suivant l'amplitude du déplacement : on peut donc modifier l'angle des deux visées suivant l'éloignement du point P.

Une réglette à crémaillère, mue par un pignon monté sur l'axe de la vis de rappel qui produit les déplacements de la lentille, glisse en face d'un repère fixé à l'appareil. Pour chaque position de la lentille et, par suite, de la réglette, on a inscrit sur la réglette la distance correspondant à la valeur de α qui résulte du déplacement donné à la lentille mobile. D'après cela, lorsque B aperçoit à la fois A et P, il n'a qu'à lire, sur l'instrument, la distance cherchée.

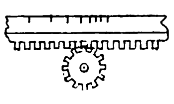


Fig. 4.

Opération pratique. — L'observateur A se place de manière à voir P par double réflexion dans le prisme ; puis, il fait placer B, qui lui est relié par un fil long de 40^{m}, de façon à l'apercevoir directement dans son viseur.

L'observateur B, une fois placé, se tourne de façon à voir P par réflexion dans le prisme, et il agit sur la vis de rappel jusqu'à ce qu'il aperçoive A, directement, dans le champ de son viseur. Ce résultat obtenu, il donne un signal pour que A, qui est immobile, rectifie, s'il y a lieu, la coïncidence des deux images ; il rectifie lui-même la coïncidence des siennes et il lit la distance. Les deux appareils sont tenus à la main.

Télémètre Gautier. — Un tube cylindrique renferme deux miroirs à 45° qui fonctionnent comme les deux faces étamées des prismes de l'appareil précédent. Une lunette reçoit, dans une moitié de son champ, des rayons de visée directe ; dans l'autre, des rayons doublement réfléchis. Sur la partie antérieure du tube est monté un anneau mobile portant un prisme. En faisant tourner l'anneau et le prisme, on fait varier l'angle de déviation des rayons destinés à la lunette. L'appareil est donc analogue à l'appareil B du télomètre Goulier.

Emploi. — Tourner l'anneau mobile, de manière à amener

le trait *infini* en face du repère fixe (déviation nulle); alors les deux visées sont rectangulaires. L'observateur vise le point dont il veut savoir la distance et remarque, dans la campagne, un objet éloigné dans le prolongement de la direction de la seconde visée.

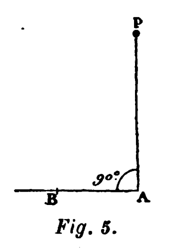


Fig. 5.

Il se transporte alors, dans cette direction AB, d'une certaine distance AB qu'il mesure. Arrivé en B il vise de nouveau P et agit, sur l'anneau mobile, jusqu'à ce que l'image de l'objet éloigné qu'il a remarqué lui parvienne. A ce moment il lit, sur une graduation portée par l'anneau mobile, la distance qui se trouve inscrite sur le trait correspondant au repère.

On peut appliquer cette méthode, en se servant de l'appareil B du télomètre Goulier.

Télémètre Labbez. — Cet appareil est analogue au précédent, mais la vision de l'objet auxiliaire se fait sans interposition de prisme. C'est par la variation de l'angle des deux miroirs qu'on obtient la coïncidence des deux images.

On fait varier l'inclinaison du second miroir sur le premier qui est fixe, en agissant sur un anneau mobile qui porte, comme l'appareil précédent, une graduation en distances, mobile devant un repère. Quand l'angle est de 45°, le repère se trouve en regard du trait ∞.

Télémètre Sapia. — Il donne la distance d'un navire à une batterie de côte, en fonction de la hauteur de la batterie au-dessus du niveau de la mer et de l'angle de dépression, c'est-à-dire, de l'angle que la ligne de visée du navire fait avec l'horizon.

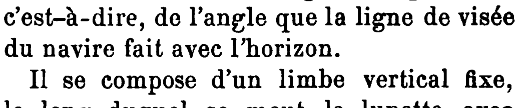


Fig. 6.

Il se compose d'un limbe vertical fixe, le long duquel se meut la lunette avec laquelle on vise le navire. Cette lunette est mobile autour d'un axe, fixé en A, perpendiculaire au plan du limbe; elle s'appuie, en outre, sur un excentrique à came, appelé *limaçon multiplicateur*. L'inclinaison de la lunette varie suivant la portion du limaçon sur laquelle elle repose.

La came amplifie cette variation d'angle. Le mouvement angulaire du limaçon entraîne une aiguille indicatrice mobile contre l'autre face du limbe. Cette aiguille porte un curseur mobile. Sur la seconde face du limbe, des circonférences concentriques ont été tracées, ayant leur centre au centre de rotation du limaçon et des rayons proportionnels à différentes altitudes. Sur chacune d'elles, on marque les positions de la règle indicatrice qui correspondent, pour une altitude proportionnelle à son rayon, à une même distance horizontale.

Emploi. — Si l'on a soin de mettre le curseur à hauteur de la circonférence correspondant à l'altitude de la batterie, il suffit de viser le navire : la position correspondante du limaçon détermine une certaine position de l'aiguille indicatrice et la distance cherchée se lit *à hauteur du curseur* sur la circonférence correspondante.

Méthode Arnould. — Une base fixe, de grande longueur, a été préalablement mesurée ; un observateur est placé à chaque extrémité. Chaque observateur muni d'un appareil pour mesurer les angles se tient en relation téléphonique avec un poste central où la base, réduite à une échelle donnée, est reportée sur une planchette. Les indications angulaires transmises par le téléphone permettent de fixer immédiatement la position du but, grâce à des rayons divergeant des deux stations, tracés à l'avance, sous toutes les inclinaisons. Des cercles concentriques, tracés également à l'avance, autour de l'emplacement de la pièce, donnent la distance du but par une simple lecture.

On prendra trois stations au lieu de deux, si l'on veut avoir une vérification. Les erreurs grossières, accidentelles, seront ainsi évitées.

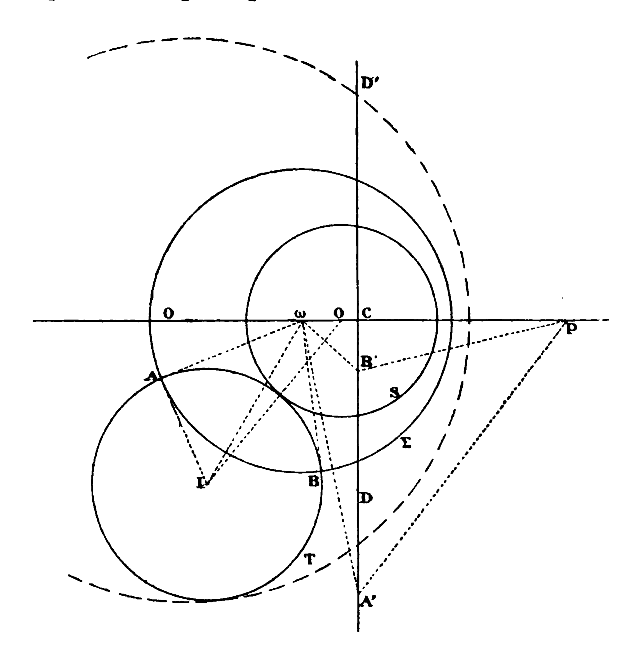
Cette méthode est analogue à celle qui est employée dans les places, pour le tir concentrique. Elle en diffère en ce que le but des planchettes Perruchon, pour le tir concentrique, est de donner par une simple lecture la hausse et la dérive à employer pour ouvrir le feu sur le but ; même, s'il n'est pas visible de la batterie.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (*)

(CONCOURS DE 1887)

Solution par M. Levavasseur, professeur au Lycée de Moulins.

1. — Considérons les cercles S et Σ et l'un quelconque des cercles T, puis transformons, par rayons vecteurs réciproques, l'ensemble de ces trois cercles en prenant pour centre d'inversion le point ω et pour puissance d'inversion le carré de ρ.



Le cercle Σ et le cercle T se transforment en eux-mêmes; tandis que le cercle O se transforme en un autre cercle O′, tangent au cercle T, et qui est le troisième cercle fixe cherché.

(*) Voyez l'énoncé, *Journal*, 1887, p. 250.

2. — Posons $\widehat{O\omega A} = 2u, \quad \widehat{O\omega B} = 2v;$
et, par suite, $\widehat{O\omega A'} = u, \quad \widehat{O\omega B'} = v;$
puis, I étant le centre de la circonférence T,

$$\widehat{O\omega I} = u + v, \quad \text{et} \quad \widehat{I\omega A} = u - v,$$

Soit C le pied de DD′; posons encore

$$CA' = x, \quad CB' = x',$$

et, enfin,

$$C\omega = \delta.$$

On a

$$\operatorname{tg} u = \frac{x}{\delta}, \qquad \operatorname{tg} v = \frac{x'}{\delta}.$$

Désignons par R le rayon du cercle T. Dans le triangle ωIO, on a

$$\overline{IO}^2 = \overline{I\omega}^2 + \overline{\omega O}^2 - 2 I\omega . \omega O \cos O\omega I.$$

Or

$$IO = R + r; \quad \overline{I\omega}^2 = R^2 + \rho^2; \quad \omega O = d; \quad \widehat{O\omega I} = u + v.$$

Donc

$$(R + r)^2 = R^2 + \rho^2 + d^2 - 2d\sqrt{R^2 + \rho^2}\cos(u + v).$$

La considération du triangle ωIA nous donne les relations

$$R = \rho \operatorname{tg}(u - v), \qquad \sqrt{R^2 + \rho^2} = \frac{\rho}{\cos(u - v)}.$$

Par suite,

$$r^2 + 2r\rho \operatorname{tg}(u - v) = \rho^2 + d^2 - \frac{2d\rho\cos(u + v)}{\cos(u - v}\,;$$

ou, enfin,

$$2r\rho \sin(u - v) = (\rho^2 + d^2 - r^2)\cos(u - v) - 2d\rho\cos(u + v).$$

Maintenant, on a :

$$\frac{x - x'}{\delta} = \operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v = \frac{\sin(u - v)}{\cos u \cos v},$$

$$1 + \frac{xx'}{\delta^2} = 1 + \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v = \frac{\cos(u - v)}{\cos u \cos v},$$

$$1 - \frac{xx'}{\delta^2} = 1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v = \frac{\cos(u + v)}{\cos u \cos v};$$

ou

$$\frac{\sin(u - v)}{\dfrac{x - x'}{\delta}} = \frac{\cos(u - v)}{1 + \dfrac{xx'}{\delta^2}} = \frac{\cos(u + v)}{1 - \dfrac{xx'}{\delta^2}}.$$

D'où, la relation

$$2r\rho\frac{(x - x')}{\delta} = (\rho^2 + d^2 - r^2)\left(1 + \frac{xx'}{\delta^2}\right) - 2d\rho\left(1 - \frac{xx'}{\delta^2}\right),$$

qu'on peut écrire

(1) $2r\rho\delta(x - x') = [(d + \rho)^2 - r^2]xx' + [(d - \rho)^2 - r^2]\delta^2.$

Les points doubles de cette division homographique sont donnés par l'équation

$$[(d + \rho)^2 - r^2]x^2 + [(d - \rho)^2 - r^2]\delta^2 = 0.$$

Les circonférences S et Σ étant intérieures l'une à l'autre, on a $d < \rho - r$. Les points doubles sont donc imaginaires.

3. — Désignons par δ' la distance PC et par α l'angle $\widehat{A'PB'}$. On trouve facilement la formule $\operatorname{tg} \alpha = \delta' \dfrac{x - x'}{xx' + \delta'^2}.$

D'ailleurs de la formule (1) je tire

$$x\{[r^2 - (d + \rho)^2]x' + 2r\rho\delta\} = 2r\rho\delta x' + [(d - \rho)^2 - r^2]\delta^2,$$

$$x - x' = \frac{[(d - \rho)^2 - r^2]\delta^2 + [(d + \rho)^2 - r^2]x'^2}{2r\rho\delta - [(d + \rho)^2 - r^2]x'},$$

$$xx' = \frac{2r\rho\delta x'^2 + [(d - \rho)^2 - r^2]x'\delta^2}{2r\rho\delta - [(d + \rho)^2 - r^2]x'}.$$

Donc

$$\operatorname{tg}\alpha = \delta' \frac{[(d - \rho)^2 - r^2]\delta^2 + [(d + \rho)^2 - r^2]x'^2}{2r\rho\delta x'^2 + \{[(d - \rho)^2 - r^2]\delta^2 - [(d + \rho)^2 - r^2]\delta'^2\}x' + 2r\rho\delta\delta'^2}$$

ou

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Ax'^2 + C}{A'x'^2 + B'x' + C'}.$$

Cherchons d'abord s'il y a des valeurs maxima ou minima. L'équation du second degré qui donne ces valeurs est

$$(B'^2 - 4A'C')\operatorname{tg}^2\alpha + 4(AC' + CA')\operatorname{tg}\alpha - 4AC = 0.$$

Le réalisant est $4\{(AC' - CA')^2 + 4B'^2AC\}$;

Or, AC étant positif, les deux racines de cette équation sont réelles et de signes contraires. Distinguons trois cas,

Premier Cas. — Les deux racines de l'équation $A'x'^2 + B'x' + C' = 0$ sont réelles et de même signe (positives), désignons les par x_1, x_2, et supposons $x_1 < x_2$.

Pour x' infiniment grand et négatif, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{A}{A'}$, c'est une quantité positive. L'angle α est aigu, il décroît jusqu'à son minimum, puis croît jusqu'à un droit, valeur qu'il atteint pour $x = x_1$; ensuite, il devient obtus, croît jusqu'à son maxi-

mum, puis décroît jusqu'à un droit; devient aigu et décroît jusqu'à la valeur primitive; α passe deux fois par la valeur $\frac{\pi}{2}$.

DEUXIÈME CAS. — δ' est tel que l'on ait $B'^2 - 4A'C' = 0$. L'angle maximum est droit, α ne peut devenir obtus ; α ne passe donc qu'une fois par la valeur $\frac{\pi}{2}$.

TROISIÈME CAS. — $B'^2 - 4A'C'$ est négatif; l'angle maximum et l'angle minimum sont aigus, par suite, α ne peut devenir égal à $\frac{\pi}{2}$.

4. — Il existe une valeur de δ' telle que l'angle $\widehat{A'PB'}$ soit constant. En effet on a trouvé

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\delta'(x - x')}{xx' + \delta'^2}$$

ou bien $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\delta'}{2r\rho\delta} \cdot \frac{[(d + \rho)^2 - r^2]\, xx' + [(d - \rho)^2 - r^2]\, \delta^2}{xx' + \delta'^2}$$

Il suffit de choisir δ' au moyen de l'équation

$$(d + \rho)^2 - r^2 = [(d - \rho)^2 - r^2]\,\frac{\delta^2}{\delta'^2},$$

qui donne $$\delta' = \delta\sqrt{\frac{(d - \rho)^2 - r^2}{(d - \rho)^2 - r^2}}.$$

Alors on a $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\delta'\,[(d + \rho)^2 - r^2]}{2r\rho\delta},$$

ou $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2r\rho}\sqrt{(\rho^2 + d^2 - r^2)^2 - 4d^2\rho^2}.$$

Dans le cas où A_{n+1} coïncide avec A_1, le point A'_{n+1} doit aussi coïncider avec A'_1, donc α doit être égal à $\frac{k\pi}{n}$, k étant entier, et l'on a bien la relation cherchée.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET (*)

PARIS (Juillet 1887).

1. — Étant donné un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont égales, on demande de calculer la distance de son centre de gravité aux sommets, aux faces et aux arêtes du tétraèdre; on demande aussi de calculer la plus courte distance de deux arêtes opposées.

Réponses : 1° Distance de G aux sommets, $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

2° — aux faces, $\frac{a}{2\sqrt{6}}$.

3° — aux arêtes, $\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

4° Plus courte distance de deux arêtes opposées, $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

— Travail d'une force constante, sa définition. — Unité de travail.

2. — Étant donnés deux cercles tangents extérieurement l'un à l'autre, on demande de calculer la longueur de la portion de la tangente commune à ces deux cercles, comprise entre les deux points de contact, et de calculer la surface engendrée par cette portion de la tangente commune lorsqu'elle tourne autour de la ligne des centres. On donne les rayons R et R' des deux cercles.

Réponses : Tangente commune $= \sqrt{RR'}$;
Surface engendrée : $S = 4\pi RR'$.

— On peut toujours réduire à deux, trois forces appliquées à un corps solide.

3. — Étant donné le polynôme $ax^2 + bx + c$, déterminer la quantité λ par la condition que le polynôme $ax^2 + bx + c + \lambda(x^2 + 1)$ soit un carré parfait. Démontrer que l'équation en λ a ses racines réelles.

Réponse : $\lambda = \frac{-(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + b^2}}{2}$.

— Inégalité des jours et des nuits. On fera la discussion seulement pour un point de la zone tempérée.

4. — Calculer le rayon de base et la hauteur d'un cône, sachant que son volume est égal à celui d'une sphère de rayon donné a et que sa surface totale égale m fois la surface de la même sphère. Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles le problème admet des solutions?

(*) Ces énoncés et les réponses qui les accompagnent sont empruntés au Recueil publié par la librairie Croville-Morant et Foucart; on trouvera dans cette publication, les solutions développées.

Réponses ·
Rayon $x = a\sqrt{m \pm \sqrt{\frac{m^3 - 2}{m}}}$.

Hauteur $y = 2ma\left(m \mp \sqrt{\frac{m^3 - 2}{m}}\right)$,

Condition $m \geqslant \sqrt[3]{2}$.

— Soit un mouvement dans lequel la vitesse, à l'instant t, est donnée par la formule $v = at$, où a désigne une constante. Déduire, de cette formule, la loi de l'espace dans le mouvement considéré.

Réponse : $e = e_0 + \frac{1}{2}at^2$.

5. — Extraire, à un centième près, la racine carrée du nombre $\frac{355}{113}$.

Réponse : 1,77.

— Aux sommets ABCD d'un rectangle, on élève des perpendiculaires au plan de ce rectangle, et on les prolonge jusqu'à la rencontre d'un plan quelconque A'B'C'D'. Prouver: 1° que A'B'C'D' est un parallélogramme; 2° que $AA' + DD'$ égale $BB' + CC'$; 3° Calculer le volume du solide, connaissant $AB = a$, $AC = b$, $AA' = \alpha$, $DD' = \beta$.

Réponse : $V = \frac{ab(\alpha + \beta)}{2}$.

QUESTIONS 211 ET 233 (*)

Solution par M. Youssoufian, à Constantinople.

Étant données deux circonférences O, O', *on mène les rayons* OA, O'B, *qui se coupent en* C, *sous un angle constant; on demande le lieu géométrique décrit par le milieu de* AB.

(A. Fitz-Patrick.)

Soit M le milieu de AB. Je joins M au milieu P de la ligne des centres OO', et je projette A, M et B sur OO'. Soient m, n les angles O et O' du triangle OCO'.

On a $$m + n = 180° - C \qquad (1)$$

Dans le trapèze rectangle ABKK', MH joint les milieux des deux côtés non parallèles;

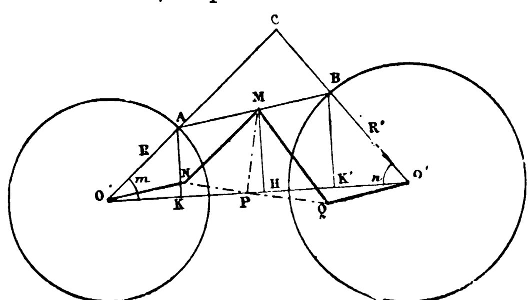
donc $$MH = \frac{BK' + AK}{2} = \frac{R' \sin n + R \sin m}{2}. \qquad (2)$$

(*) Par une inadvertance, déjà signalée, cette question a été proposée deux fois, sous les nos 211 et 233.

D'autre part,

$$HP = \frac{O'K' - OK}{2} = \frac{R' \cos n - R \cos m}{2}; \qquad (3)$$

car on a KH = K'H ; de plus P est le milieu de OO'.



Le triangle rectangle MHP donnant

$$\overline{MP}^2 = \overline{MH}^2 + \overline{PH}^2,$$

je remplace, dans cette dernière égalité, MH et PH par leurs valeurs respectives (2), (3), et j'ai

$$\overline{MP}^2 = \left(\frac{R' \sin n + R \sin m}{2}\right)^2 + \left(\frac{R' \cos n - R \cos m}{2}\right)^2$$

$$= \frac{R^2 + R'^2 - 2RR'(\cos m \cos n - \sin m \sin n)}{4}.$$

Mais, d'après (1),

$$\cos m \cos n - \sin m \sin n = \cos(m + n) = \cos(\pi - C) = -\cos C,$$

donc $$\overline{MP}^2 = \frac{R^2 + R'^2 + 2RR' \cos C}{4}.$$

Ainsi MP est constant; par suite, *le lieu cherché est une circonférence de cercle dont le rayon* ρ *est donné par la formule*

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + R'^2 + 2RR' \cos C}, \qquad (4)$$

et dont le centre est au milieu de OO'.

Cette circonférence, comme le prouve l'expression (4), est toujours réelle; ce fait est évident, *a priori*. Le cas particulier où C = o donne une vérification du résultat trouvé.

Enfin, la formule (4) prouve que ρ est la médiane d'un triangle dont les côtés, respectivement égaux à R et à R', sont inclinés de l'angle C. Cette remarque permet donc de construire ρ.

Solution géométrique, par M. Léon Crabit. — Menons O'N égal et parallèle à BM; puis, OQ égal et parallèle à AM. Les droites O'N, OQ étant égales et parallèles, les points N, Q sont en ligne droite avec P. Les figures OBMN, OQAM sont d'ailleurs des parallélogrammes, et nous avons

$$MN = O'B, \qquad MQ = AO.$$

On voit donc que MP est la médiane d'un triangle NMQ, dans lequel l'angle NMQ = O'CO est constant. Ce triangle est de forme invariable; et le lieu de M est une circonférence de centre C et de rayon PM, PM étant la médiane d'un triangle dont deux côtés sont égaux aux rayons donnés, l'angle compris étant égal à l'angle proposé C.

NOTA. — Autres solutions par MM. Henri Martin, lycée Condorcet; Achille Ménétrier, au collège de Châlon-sur-Saône; J. Chapron, à Bragelogne; Auguste Boutin, professeur au collège de Courdemanche.

QUESTION 213

Solution, par M. E. QUINTARD, à Arbois.

On considère deux cercles γ *et* γ', *et, sur leurs circonférences, deux points* A,A'. *On propose de trouver, sur l'axe radical* Δ, *un point* M *tellement situé que les droites* MA,MA' *rencontrent les circonférences considérées, en deux points* B, B' *tels que* BB' *soit perpendiculaire sur* Δ. (Bordage.)

Supposons le problème résolu : les perpendiculaires élevées en A, A', aux droites MA, MA', coupent Δ en des points E, E' qui se confondent.

En effet, on a

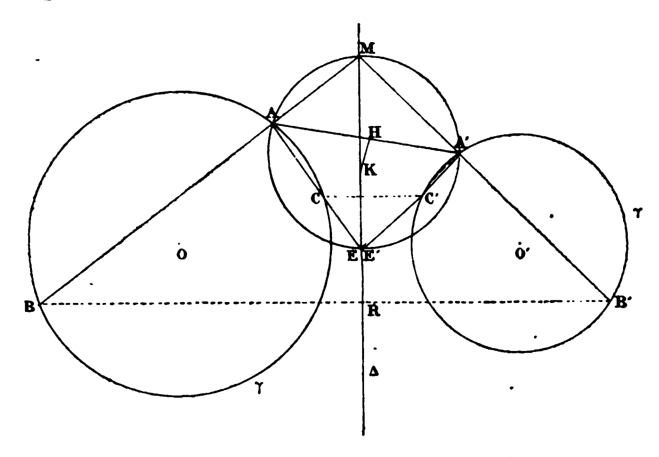
$$MA.MB = ME.MR, \qquad MA'.MB' = ME'.MR.$$

D'ailleurs M appartenant à l'axe radical, les produits MA.MB, MA'.MB' sont égaux : ainsi ME = ME'.

De là on déduit la construction suivante :

Au milieu H de AA', on élève une perpendiculaire qui rencontre Δ en K: la circonférence décrite, de K comme centre,

avec KA = KA′ pour rayon, coupe Δ en deux points **M, E,** qui répondent, l'un et l'autre, à la question.



Le problème est toujours possible; il comporte deux solutions.

Nota. — Solutions analogues par MM. Chapron, à Bragelogne; Ignacio Beyens, capitaine du génie, à Cadix; Émile Vigarié; Henri Martin, élève au Lycée Condorcet; A. C., élève au Lycée de Grenoble.
MM. Chapron et A. C. donnent une solution basée sur la transformation par rayons vecteurs réciproques, solution intéressante, permettant de traiter le cas général, celui où BB′ fait, avec Δ, un angle quelconque.

QUESTION 214

Solution par M. Paul **Bourgarel** , à Antibes.

Lorsque quatre points A, B, C, D *sont situés en ligne droite, dans l'ordre indiqué, ils déterminent six segments, parmi lesquels deux* (AC *et* BD) *empiètent l'un sur l'autre.*

Démontrer que, si l'on fait abstraction de ces deux segments, et si les quatre points forment une division harmonique, les quatre autres segments jouissent de la propriété que l'inverse du plus petit est égal à la somme des inverses des trois autres.

(G. L.)

Affectons de signes les segments, et prenons pour sens positif celui de A vers D.

Les quatre points A, B, C, D formant une division harmonique, on a les relations :

$$\frac{2}{AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD},$$

$$\frac{2}{CA} = \frac{1}{CB} + \frac{1}{CD}.$$

Mais $$AC + CA = o;$$

par suite, $$\frac{1}{AC} + \frac{1}{CA} = o.$$

Donc, on a : $$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} + \frac{1}{CB} + \frac{1}{CD} = o,$$

ou, en remplaçant CB par $-$ BC,

$$\frac{1}{BC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} + \frac{1}{CD}.$$

NOTA. — Solutions diverses par MM. A. Boutin, professeur au collège de Courdemanche ; D. Cotoni, lycée d'Alger ; Ignacio Beyens, à Cadix ; J. Chapron, à Bragelogne; E. Quintard à Arbois.

QUESTION 215

Solution par M. Émile VIGARIÉ.

On considère un triangle équilatéral ABC *et le cercle* Δ *inscrit à ce triangle. Du point* O, *centre de* Δ, *avec une longueur égale au quart du rayon de* Δ, *comme rayon, on décrit un cercle* Δ′. *Parallèlement à* BC, CA, AB, *on mène à* Δ′, *dans le même sens, des demi-tangentes qui rencontrent* Δ *respectivement en* α, β, γ. *Le triangle* αβγ, *ainsi formé, est équilatéral. Démontrer : 1° que les côtés de ce triangle* βγ, γα, αβ *passent par les sommets* A, B, C *du triangle proposé*; 2° *qu'ils sont égaux à la moitié de ceux de ce triangle.* (G. L.)

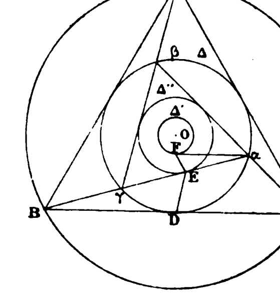
On sait que, dans tout triangle équilatéral, le rayon R du cercle circonscrit est double du rayon r du cercle inscrit. Les deux triangles semblables ABC, αβγ ont leurs côtés proportion-

nels aux rayons de leurs cercles circonscrits. Donc :

$$\frac{AB}{\alpha\beta} = \frac{BC}{\beta\gamma} = \frac{CA}{\gamma\alpha} = \frac{R}{r} = 2.$$

De plus, le rayon du cercle Δ'', inscrit à $\alpha\beta\gamma$, est égal à $\frac{r}{2}$.

Par les sommets A, B, C, menons des tangentes à Δ'' : elles coupent Δ en α_1, β_1, γ_1 sommets, un triangle équilatéral $\alpha_1\beta_1\gamma_1$; qui se confond avec $\alpha\beta\gamma$. En effet, par α_1 menons la tangente α_1F à Δ' ; soient E, D les points de contact de $B\alpha_1$, BC, avec Δ', Δ. Les triangles α_1FE, BED, ayant leurs côtés proportionnels sont semblables :



$$\text{angle EBD} = \text{angle } E\alpha_1F.$$

Donc α_1F est parallèle à BC, et le point α_1 se confond avec α. Par suite, les droites $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ passent par les sommets du triangle donné.

Remarques. — On a :

$$\beta\gamma = C\alpha = A\beta = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{4}.$$

De plus, $\quad$ angle γBC = angle $\alpha CA = \beta AB = \theta$;

et

$$\sin\theta = \frac{3r}{a(\sqrt{5}+1)}.$$

Nota. — M. Quintard, à Arbois, nous a communiqué une solution trigonométrique de cette question.

QUESTION PROPOSÉE

---

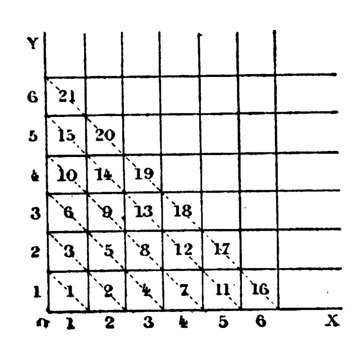
273. — Soit I le centre d'un cercle tangent aux trois côtés d'un triangle ABC; on applique, en ce point, trois forces égales dirigées respectivement suivant IA, IB, IC ; démontrer que la résultante de ces trois forces passe par le centre du cercle circonscrit au triangle considéré. *(G. L.)*

inexact — voir page 48

NOTA. — La question 9386 proposée par M. Neuberg dans le n° du 1er janvier dernier de l'*Educational Times* est ainsi conçue :

Si, suivant les perpendiculaires abaissées du centre O *du centre circonscrit à un triangle* ABC, *sur les côtés de ce triangle, on applique, dans un sens, ou dans l'autre, trois forces égales; la résultante passera par le centre de l'un des cercles tangents au trois côtés.*

On montrera que la question 273, que nous proposons ici est, au fond, identique à celle de M. Neuberg; nous n'avons pas besoin de dire qu'elle nous a été inspirée par elle.



ERRATA

1° Les questions proposées sous les n°s 227 et 197 sont identiques.

2° Par une erreur de mise en pages, la figure ci-contre n'a pas été placée dans le n° de décembre; elle doit accompagner le texte de la page 278.

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 25824-7.

CONSIDÉRATIONS SUR LES SYMÉDIANES

Par M. **Clément Thiry**, étudiant à la Faculté des sciences
de l'Université de Gand.

---

1. Terminologie. — Soit un triangle ABC; la tangente en A, au cercle circonscrit, rencontre BC en un point T. Nous avons proposé, dans notre *Troisième livre de Géométrie* (*), de donner à la tangente AT, au cercle circonscrit du triangle ABC, le nom de *symédiane extérieure.* Cette dénomination, tout en ayant l'avantage de préciser et d'abréger le discours, montre en outre, certaines *analogies* qui existent entre les symédianes et les bissectrices. A l'exemple de ce qui se fait pour ces dernières, le mot *symédiane* désignerait toujours, sauf avis contraire, la symédiane intérieure.

Voici, en adoptant cette terminologie, quelques énoncés de propriétés connues.

a) *Les trois symédianes se coupent en un même point* K.

b) *Deux symédianes extérieures et une symédiane intérieure concourent respectivement aux points* K_a, K_b, K_c, *qui sont, suivant l'expression de M. Neuberg,* les associés *du point* K *de Lemoine,* (les *algébriquement associés,* comme dit encore M. de Longchamps).

c) *Les symédianes partant du sommet d'un triangle partagent harmoniquement la base dans le rapport des carrés des côtés adjacents.*

d) *Les pieds de deux symédianes extérieures, et le pied d'une symédiane, sont en ligne droite.*

e) *Les pieds des symédianes extérieures sont en ligne droite.*

f) *Le pied de la symédiane extérieure est le pôle de la symédiane correspondante.*

(*) Voir *Journal* 1887, p. 45.

Corollaire. — *La droite, qui joint les pieds des symédianes extérieures, est la polaire du point de Lemoine, par rapport au cercle circonscrit.*

Ces théorèmes (dont quelques-uns, faciles à reconnaître, conviennent à quatre points algébriquement associés, mais quelconques (pourront être rapprochés de ceux qui sont relatifs aux bissectrices d'un triangle.

Si le nom de *symédiane extérieure* était admis, on pourrait remplacer la dénomination *points associés de Lemoine*, due à M. Neuberg, par celle de *points extérieurs de Lemoine* (points de concours de deux symédianes extérieures et d'une symédiane intérieure). L'expression *point de Lemoine* désignerait toujours, bien entendu, le point de concours des symédianes intérieures.

2. — Dans ce qui va suivre, nous rencontrerons quelques formules intéressantes, peut-être nouvelles.

Nous désignerons par s_a, s_b, s_c, les longueurs des symédianes intérieures ; par s'_a, s'_b, s' , celle des symédianes extérieures

Théorème I. — *En prenant négativement la valeur de la plus petite des trois symédianes extérieures, le triangle étant scalène, la somme des inverses de leurs longueurs est nulle.*

Les triangles semblables TAC, TAB donnent

$$\frac{b}{c} = \frac{AT}{TB} = \frac{TC}{AT}.$$

Ces égalités donnent TB et TC ; et comme $TB - TC = a$,

on a

$$s'_a = \frac{abc}{c^2 - b^2}.$$

$$\text{Donc } \frac{1}{s'_a} + \frac{1}{s'_b} + \frac{1}{s'_c} = 0$$

Remarque. — On a aussi

$$\frac{a^2}{s'_a} + \frac{b^2}{s'_b} + \frac{c^2}{s'_c} = 0.$$

Théorème II. — *Le produit de deux côtés d'un triangle est le double du produit de la symédiane extérieure par la projection de la médiane sur le troisième côté.*

En effet, si M est le milieu de BC, H le pied de la hauteur,

$$b^2 - c^2 = 2a\mathrm{MH}.$$

On a donc $$s_a = \frac{bc}{2\mathrm{MH}}.$$

Théorème III. — *Dans tout triangle, au plus grand côté est opposée la plus petite symédiane, et réciproquement.*

Corollaire. — Un triangle est isocèle lorsque deux symédianes sont égales (*).

s_b, s_c, étant les symédianes issues de B, C, le théorème de Stewart donne *directement* (**):

$$s_b^2 = \frac{2a^2c^2}{a^2+c^2} - \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+c^2)^2},$$

$$s_c^2 = \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2} - \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

En supposant $b > c$, on a

$$\frac{a^2b^2c^2}{(a^2+c^2)^2} - \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)^2} > 0 \qquad \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2} - \frac{2a^2c^2}{a^2+c^2} > 0,$$

Par suite,

$$\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2} - \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)^2} - \left(\frac{2a^2c^2}{a^2+c^2} - \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+c^2)^2}\right) > 0,$$

ou $$s_c^2 > s_b^2.$$

On observera encore que si $b = c$, on a, en même temps, $s_b = s_c$.

Les réciproques sont évidentes.

3. — Soient B′, C′, S′ les points de rencontre d'une sécante quelconque avec les côtés AB, AC et la symédiane AS; β et γ

(*) Voir *Mathesis*, t. V, p. 34.

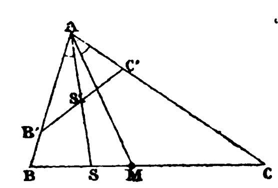
(**) Soit AS la symédiane. En vertu du théorème de Stewart, on

$$\mathrm{AS}^2 = \frac{(c^2+b^2).\mathrm{BS}}{a} - \mathrm{BS}.\mathrm{CS};$$

Mais on sait (ou l'on trouve sans peine) que

$$\mathrm{CS} = \frac{ab^2}{b^2+c^2}, \quad \mathrm{BS} = \frac{ac^2}{b^2+c^2}; \text{ donc, etc...}$$

étant les perpendiculaires baissées de S′ sur b et c, on peut écrire



$$(1)\quad \frac{B'S'}{C'S'} = \frac{AB'.\gamma}{AC'.\beta} = \frac{AB'.AB}{AC'.AC}.$$

Cette relation est importante et conduit à plusieurs conséquences.

1° Si B′C′ se confond avec BC, on a

$$\frac{BS}{CS} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

2° Si B′C′ est antiparallèle à BC, on a

$$AB.AB' = AC.AC';$$

et par suite, $B'S' = C'S'.$

3° Si la sécante passe par B, on a

$$\frac{BS'}{C'S'} = \frac{c^2C^2}{b.AC'}.$$

4° Si BC′ est la symédiane issue de B, alors

$$C'A = \frac{bc^2}{a^2 + c^2},$$

S′ devient le point K, de Lemoine; et

$$\frac{BK}{KC'} = \frac{c^2}{b \times \dfrac{bc^2}{a^2 + c^2}} = \frac{a^2 + c^2}{b^2}.$$

D'après cela,

$$\frac{AK}{KS} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}, \qquad \frac{AK}{AS} = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Remarque. — L'égalité $\dfrac{AK}{KS} = \dfrac{b^2 + c^2}{a^2}$, prouve que l'on a $AK = KS$, $AK > KS$, $AK < KS$, suivant que l'angle A est droit, aigu ou obtus.

5° Si BC′ est la bissectrice de l'angle B, on a

$$\frac{BS'}{C'S'} = \frac{c^2}{b \times \dfrac{bc}{b + c}} = \frac{c(b + c)}{b^2}.$$

En outre, si $B = 2C$, BC′ est antiparallèle à BC, et

$$b^2 = c(b + c). \quad (*)$$

(*) Voir *Mathesis*, année 1885, p. 93.

4. — On a

$$\mathrm{MS} = \mathrm{BM} - \mathrm{BS} = \frac{a}{2} - \frac{ac^2}{b^2 + c^2} = \frac{a(b^2 - c^2)}{2(b^2 + c^2)}.$$

Si H désigne le pied de la hauteur, il vient

(2) $$\frac{\mathrm{MS}}{\mathrm{MH}} = \frac{a^2}{b^2 + c^2}.$$

Remarque. — De cette formule, il résulte que MS = MH, MS < MH, MS > MH, suivant que A est droit, aigu ou obtus.

5. — Les angles B′AS′, MAC étant égaux, on a, x et h désignant les hauteurs des triangles AB′C′, ABC :

$$\frac{\mathrm{AB'.AS'}}{\mathrm{AC.AM}} = \frac{\mathrm{B'S'}.x}{\mathrm{MC}.h},$$

d'où $$\frac{\mathrm{AS'}}{\mathrm{AM}} = \frac{2\mathrm{B'S'.AC}.x}{\mathrm{BC.AB'}.h}.$$

Or $$\frac{x}{h} = \frac{\mathrm{AB'.AC'.BC}}{\mathrm{AB.AC.B'C'}},$$

donc $$\frac{\mathrm{AS'}}{\mathrm{AM}} = \frac{2\mathrm{B'S'.AC'}}{\mathrm{B'C'.AB}}.$$

Mais (1) $$\frac{\mathrm{B'S'}}{\mathrm{B'C'}} = \frac{\mathrm{AB.AB'}}{\mathrm{AB.AB'} + \mathrm{AC.AC'}}.$$

Donc

(3) $$\frac{\mathrm{AS'}}{\mathrm{AM}} = \frac{2\mathrm{AB'.AC'}}{\mathrm{AB.AB'} + \mathrm{AC.AC'}};$$

ou

(4) $$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC'}} + \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB'}} = \frac{2\mathrm{AM}}{\mathrm{AS'}}.\ (**)$$

Cas particulier. — Si B′C′ coïncide avec BC, on a la formule connue

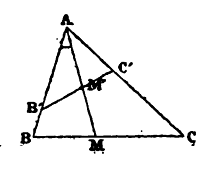
$$\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{AM}} = \frac{2bc}{b^2 + c^2}.$$

(**) Si M′ est un point de la médiane, on trouve, de même,

(4′) $$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB'}} + \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AC'}} = \frac{2\mathrm{AM}}{\mathrm{AM'}}.$$

En particulier si M′ se confond avec $\mathrm{M_1}$ on a

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB'}} + \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AC'}} = 2.$$



REMARQUE. — De $\frac{AK}{AS} = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$, nous concluons

$$\frac{AK}{AM} = \frac{2bc}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

6. — Nous venons de trouver

$$\frac{AS'}{AM} = \frac{2B'S'.AC'}{B'C'.AB}.$$

De même,

$$\frac{AS'}{AM} = \frac{2C'S'.AB'}{B'C'.AC}.$$

Donc

(5) $$\frac{\overline{AS'}^2}{\overline{AM}^2} = \frac{4AB'.AC'.B'S'.C'S'}{AB.AC.\overline{B'C'}^2}.$$

REMARQUE. — Si S' est le point K de Lemoine, on a

(6) $$\frac{AB'.AC'.B'K.C'K}{\overline{B'C'}^2} = \frac{b^3c^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

7. — Si T' est le point où B'C' rencontre la symédiane extérieure AT, on a une formule analogue à la formule (4) :

(7) $$\frac{AB}{AC'} - \frac{AC}{AB'} = \frac{BC}{AT'}.$$

comme on le démontrera facilement.

ESSAI

SUR LA

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, 1887, voir p. 265.)

CHAPITRE VI

LES PROBLÈMES DE LA DROITE INACCESSIBLE

Avant d'aborder, comme nous le ferons dans le chapitre suivant, la détermination de la longueur d'un segment constitué par deux points inaccessibles, nous devons examiner

au préalable, certaines questions dont la solution intéresse les différents problèmes de la droite inaccessible et, notamment, celle qui peut se poser ainsi: *mener, par un point donné* C, *une parallèle à une droite inaccessible*, AB.

Servois et Mascheroni ont compris toute l'importance de ce problème pour lequel ils ont proposé plusieurs solutions; nous indiquerons d'ailleurs tout à l'heure une de ces solutions, présentant un caractère particulier de simplicité; elle es basée sur le principe des antiparallèles.

60. — Il est sous-entendu que le prolongement de AB ne pénètre pas dans la partie accessible; autrement, on pourrait jalonner ce prolongement et l'on serait ramené à tracer une parallèle à une droite accessible.

Nous signalons aussi, sans nous y arrêter, la solution souvent présentée, qui consiste à porter, sur les jalonnements CA et CB, dans la partie accessible, des longueurs CA' CB', proportionnelles aux distances CA, CB. Cette solution, très simple au point de vue théorique, présente, quand on envisage son côté pratique, le grave inconvénient d'exiger la connaissance des longueurs CA, CB. En la comparant à celles que nous allons successivement exposer, on reconnaîtra qu'elle offre vraiment une complication relative.

61. La solution par les figures homothétiques. — Une des solutions qui se présentent le plus naturellement à l'esprit est celle qui prend pour base le principe des figures homothétiques. Nous l'exposerons avant plusieurs autres, plus pratiques, parce qu'elle est très facile à retenir.

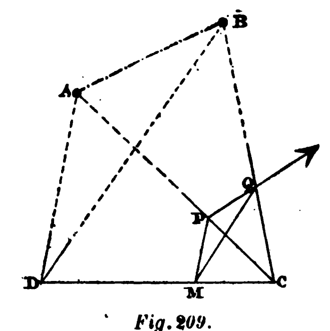


Fig. 209.

Prenons, arbitrairement d'ailleurs, deux points C, D, dans la partie accessible; puis, jalonnons les lignes de visée CA, CB, DA, DB dans la région où la chose est possible. Si, par un point quelconque M, de CD, nous

menons les alignements MP, MQ respectivement parallèles à DA, DB; nous obtenons ainsi deux points P, Q, sur les droites CA, CB.

Il résulte, de cette construction, que les quadrilatères CMPQ COAB sont homothétiques; PQ est donc parallèle à AB.

La construction précédente donne aussi la longueur du segment inaccessible AB. On a, en effet,

$$AB = PQ\,\frac{CD}{CM}.$$

Mais nous ne signalons ce résultat que très incidemment; parce que nous traiterons, avec détails, dans le chapitre suivant, le problème de la distance de deux points inaccessibles.

62. Les solutions par l'équerre ordinaire. — 1° Si la distance AB est peu considérable, et si les points A,B ne sont pas trop éloignés de la partie accessible V, on peut opérer de la manière suivante. Sur une droite HK, jalonnée sur le terrain V, on détermine les points H,K, projections de A, B, sur cette droite; puis, on jalonne les prolongements HB′, HA′ des droites AH, BK. Cela fait, on prend le milieu O de HK et l'on jalonne encore les prolongements des droites AO,BO; enfin, on achève le tracé, comme l'indique la figure.

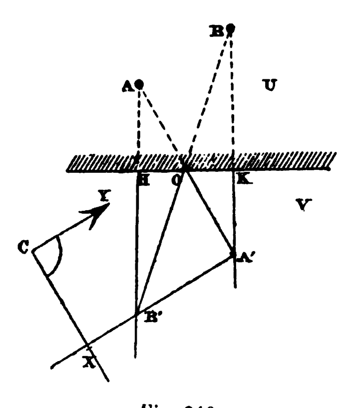


Fig. 210.

Cette construction permet aussi, comme on le voit, de déterminer la longueur de AB, car l'on a A′B′ = AB. Elle est peut-être un peu plus simple que celle qui prend pour base la considération des points symétriques de A et de B par rapport à une droite Δ jalonnée sur le terrain accessible. Voici d'ailleurs cette construction.

2° On détermine, comme nous venons de l'expliquer, les droites HA′, KB′ qui représentent les prolongements, dans la

partie accessible de HA, et de KB (*fig. 211*). Ayant pris, arbitrairement, un point O sur Δ, on relève, avec la fausse équerre, successivement les angles AOH, BOK; et l'on reporte ces angles, de l'autre côté de Δ, en HOA' et KOB'. Si l'on veut avoir, simplement, la distance AB, on relèvera la longueur A'B'; is l'on veut, en outre, avoir la parallèle à la direction AB, il faudra prendre le point B" symétrique de B, par rapport à AA'; alors A'B" est parallèle à AB.

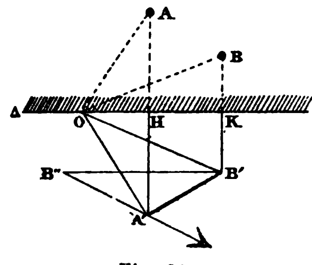


Fig. 211.

3° Supposons que les points A,B soient très éloignés, mais admettons qu'il existe, dans la partie accessible, une droite Δ sur laquelle A et B se projettent, en H et en K.

Soit C le milieu de HK; jalonnons Cz perpendiculairement à HK, et aussi les prolongements CA', CB' des directions CA, CB. Prenons maintenant, sur Cz, un certain point O, et traçons les alignements OP, OQ parallèles, respectivement à CA', CB'. La droite PQ sera partagée en deux parties égales par Cz; le segment AB jouit de cette même proprieté, relativement au prolongement Cz' de Cz; finalement PQ est paralèle à AB.

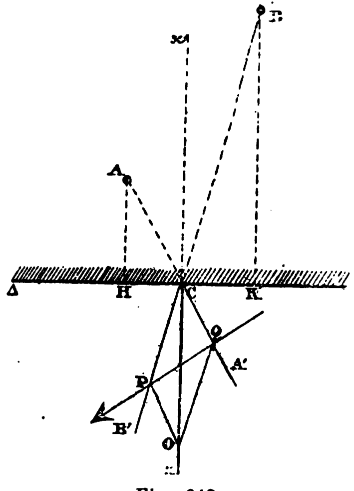


Fig. 212.

D'ailleurs, si l'on possède, dans la partie accessible, un alignement parallèle à AB, le problème peut être considéré comme résolu.

63. La solution par l'orthocentre. — Aux solutions par l'équerre, exposées ci-dessus, se rattache une solution

très naturelle; nous voulons parler de celle qui prend pour base la considération de l'orthocentre.

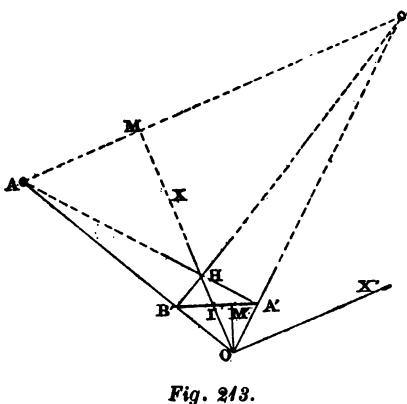


Fig. 213.

On détermine la projection B' de B, sur OA. puis la projection 'A de A, sur OB. On obtient ainsi un point H qui est l'orthocentre de AOB; par suite OHX, est la direction perpendiculaire à AB. En élevant OX', perpendiculaire à OX, cette droite OX', est la parallèle cherchée.

On peut calculer, bien simplement, la distance du point O à la droite AB, en observant que la ponctuelle O, I, H, M est harmonique; on a donc

$$\frac{1}{OM} = \frac{2}{OH} - \frac{1}{OI}.$$

On peut aussi déduire, de cette construction, la longueur de AB, en observant que les triangles OA'B', OAB étant semblables, on a

$$AB = A'B' \frac{OM}{OM'}.$$

Dans cette formule, OM' désigne la distance de O à A'B'.

Mais, la solution que nous venons d'exposer offre un inconvénient grave; elle exige, en effet, que l'orthocentre du triangle OAB soit situé sur le terrain accessible.

Cette condition est réalisée quand l'angle AOB diffère peu d'un angle droit; dans d'autres cas, il peut arriver que H appartienne, au contraire, à la région inaccessible. Bref, suivant un terme que nous expliquons plus loin, cette solution, au point de vue pratique, n'est pas *générale*. Elle se trouve notamment en défaut lorsqu'on suppose les points A, B très éloignés et l'angle AOB très aigu.

Voici une construction, conséquence naturelle d'une idée générale, et qui convient à tous les cas. Nous indiquerons,

à ce propos, quelle est cette idée, que nous appliquerons d'ailleurs, dans d'autres occasions.

64. La méthode d'inversion. — Imaginons une figure F formée de points A, B, C... (ou de lignes) situés dans une région inaccessible. Dans la partie accessible, choisissons un point O, qui sera le pôle de la transformation que nous allons effectuer. De O, visons le point A; puis, élevons à cette direction une perpendiculaire sur laquelle nous prenons un point M, tel que OM $= h$; h désigne une longueur arbitraire, mais qui sera la même pour tous les points de F; une simple ficelle, plus ou moins longue, suivant les cas, tendue à partir de O, dans la direction OM, déterminera nettement ce point M. Avec l'équerre, placée en M, on vise A, et l'on obtient, dans la direction perpendiculaire, une ligne de visée MA'; on jalonne celle-ci; un point A' se trouve ainsi déterminé, sur le prolongement de AO. D'après cette construction, on a

$$OA.OA' = h^2.$$

En la répétant, pour les différents points B, C, ..., de la figure F, on obtiendra finalement, dans la région accessible, une figure f, inverse de F, et cette figure f, sera aussi restreinte que l'on voudra, si l'on choisit h suffisamment petit. Des propriétés et des dimensions de f, on peut déduire les propriétés correspondantes et, aussi, les dimensions de la figure F qu'on ne peut aborder.

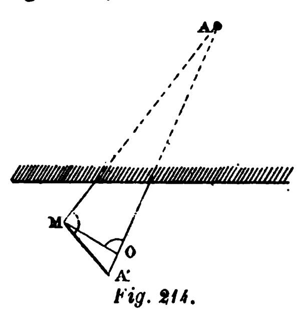


Fig. 214.

D'une façon générale, on voit comment, en utilisant l'idée qui sert de base aux méthodes de transformation des figures, et en l'appliquant à une figure inaccessible F, on pourra déduire certaines propriétés de cette figure, de l'étude de la figure transformée f; pourvu que celle-ci soit placée sur le terrain accessible.

Revenons au problème particulier que nous avons en vue.

Au point O, élevons, aux droites OA, OB des perpendiculaires sur lesquelles nous portons deux longueurs OA', OB', arbi-

trairement choisies, mais égales. Des points A', B' ainsi obtenus, déterminons les lignes de visée A'A, B'B, puis les lignes de visée, perpendiculaires à celles-ci. Les égalités

$$OA.OA'' = \overline{OA'}^2,$$
$$OB.OB' = \overline{OB'}^2,$$
$$OA' = OB',$$

prouvent que

$$OA.OA' = OB.OB'.$$

La droite A'B' est donc l'antiparallèle de AB, dans l'angle AOB.

Pour achever le problème, il ne reste plus qu'à mener $B''\beta$ perpendiculaire sur OA', et $A''\alpha$ perpendiculaire sur OB'. Le quadrilatère $A''B''\alpha\beta$ étant inscriptible, on a

$$OA''.O\beta = OB'.O\alpha;$$

Fig. 215.

et par suite

$$\frac{OA}{OB} = \frac{O\beta}{O\alpha}.$$

Ainsi $\alpha\beta$ est parallèle à AB. *(A suivre.)*

EXERCICES DIVERS *(Suite.)* (*)

Par M. **Boutin**, professeur au collège de Courdemanche.

59. — Si l'on a : $a + b + c = 0$, et qu'on pose $\Sigma a^n = a^n + b^n + c^n$, on a aussi :

$$\frac{\Sigma a^8}{8} = \left(\frac{\Sigma a^4}{4}\right)^2 + \frac{\Sigma a^3}{3} \cdot \frac{\Sigma a^5}{5},$$

$$\Sigma a^9 = \frac{3}{8}(\Sigma a^2)^3\,\Sigma a^3 + \frac{1}{9}(\Sigma a^3)^3,$$

$$\frac{\Sigma a^{10}}{2} = \left(\frac{\Sigma a^2}{2}\right)^5 + 6\left(\frac{\Sigma a^5}{5}\right)^2.$$

Voir *J. M. E.* (1887, p. 180).

(*) Voyez : *Journal*, 1887, p. 204.

On peut établir d'abord la formule de récurrence :

(A) $$\Sigma a^{n+3} = \frac{1}{2}\Sigma a^2 \Sigma a^{n+1} + \frac{1}{3}\Sigma a^3 \Sigma a^n.$$

Pour cela, considérons l'équation

$$(x-a)(x-b)(x-c) = 0;$$

en posant $(x-a)(x-b)(x-c) \equiv x^3 + px + q,$
on a

(1) $$\begin{cases} a^3 + pa + q = 0, \\ b^3 + pb + q = 0, \\ c^3 + pc + q = 0, \end{cases}$$

et, par suite, $-3q = \Sigma a^3.$

Multiplions les équations (1) respectivement par a^n, b^n, c^n, puis, ajoutons et observons que

$$p = ab + ac + bc = \frac{1}{2}(a+b+c)^2 - \frac{1}{2}\Sigma a^2 = -\frac{1}{2}\Sigma a^2,$$

nous obtenons la formule (A).

60. — Si l'on suppose $a + b + c + d = 0$, en posant $a^n + b^n + c^n + d^n = \Sigma a^n$, on a :

1° $$\frac{\Sigma a^5}{5} = \frac{\Sigma a^2}{2} \cdot \frac{\Sigma a^3}{3},$$

2° $$\Sigma a^6 = 3\left(\frac{\Sigma a^3}{3}\right)^2 - \left(\frac{\Sigma a^2}{2}\right)^3 + 6\frac{\Sigma a^2}{2} \cdot \frac{\Sigma a^4}{4};$$

et, d'une manière générale,

3° $$\Sigma a^{n+4} - \frac{1}{2}\Sigma a^2 \Sigma a^{n+2} - \frac{1}{3}\Sigma a^3 \Sigma a^{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{(\Sigma a^2)^2}{2} - \Sigma a^4\right)\Sigma a^n = 0.$$

Pour démontrer la formule précédente, on part de l'équation

(1) $$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

et en posant $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \equiv x^4 + px^2 + qx + r.$
on trouve facilement :

$$p = -\frac{\Sigma a^2}{2} \quad q = -\frac{\Sigma a^3}{3}.$$

Cela posé, dans (1), on remplace x successivement par a, b, c, d; On ajoute, et l'on obtient r; le calcul s'achève, comme dans l'exercice précédent.

61. — Vérifier les identités suivantes :

1° $$\begin{aligned} &[(a_1a_2 - b_1b_2)a_3 - (a_1b_2 + a_2b_1)b_3]^2 \\ &+ [(a_1a_2 - b_1b_2)b_3 + (a_1b_2 + a_2b_1)a_3]^2 \\ &\equiv (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2), \end{aligned}$$

2° $$\begin{aligned} &[(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4) - (a_1b_2 + a_2b_1)(a_3b_4 + a_4b_3)]^2 \\ &+ [(a_1b_2 + a_2b_1)(a_3a_4 - b_3b_4) + (a_1a_2 - b_1b_2)(a_3b_4 + a_4b_3)]^2 \\ &\equiv (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2)(a_4^2 + b_4^2). \end{aligned}$$

3° $(x-a)^3(c-b)+(x-b)^3(a-c)+(x-c)^3(b-a)$
$+3x(a-b)(a-c)(b-c)+a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)\equiv 0.$

4° $(x-a)^4(c-b)+(x-b)^4(a-c)+(x-c)^4(b-a)$
$+6x^2(a-b)(a-c)(b-c)+4x[a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)]$
$\equiv a^4(c-b)+b^4(a-c)+c^4(b-a).$

5° $$\frac{(a+p)^3}{(b-a)(c-a)}+\frac{(b+p)^3}{(a-b)(c-b)}+\frac{(c+p)^3}{(a-c)(b-c)}$$
$$\equiv\frac{a^2(3p+a)}{(b-a)(c-a)}+\frac{b^2(3p+b)}{(a-b)(c-b)}+\frac{c^2(3p+c)}{(a-c)(b-c)}.$$

(A suivre.)

VARIÉTÉS

SUR L'ÉGALITÉ ET L'ADDITION DES DURÉES

Par M. **Maurice Fouché,**
Agrégé de l'Université, Professeur à Sainte-Barbe.

Contrairement à ce qui se fait pour les autres grandeurs, on ne définit pas, en Mécanique, l'égalité et l'addition des durées. Plusieurs auteurs paraissent même croire que ces définitions sont impossibles à donner. (V. Calinon, *Étude critique sur la Mécanique*, Nancy, 1885 et *Bulletin des sciences mathématiques*, T. X (année 1886), p. 294.) On a déjà remarqué, depuis longtemps, qu'en Cinématique pure, l'absence de ces définitions ne peut présenter aucun inconvénient, parce que le temps n'y joue que le rôle d'une variable indépendante, qu'il est toujours possible de remplacer par une fonction quelconque de cette même variable. Il en est tout autrement dans la Mécanique proprement dite, où la notion des temps égaux apparaît avec un caractère objectif et expérimental, et se rattache, à la notion de la force, par l'intermé-

diaire du principe de l'inertie. Il m'a semblé qu'en modifiant quelque peu l'énoncé de ce dernier principe, on pourrait arriver à définir, d'une manière précise, deux temps égaux et une somme de deux durées, et combler ainsi une lacune regrettable dans l'enseignement de la Mécanique. Voici comment je comprends la suite des idées.

Cinématique. — On choisit un point quelconque M de la figure mobile. Le temps est une fonction arbitraire du chemin parcouru par le point M. Les théorèmes de la Cinématique sont indépendants du choix de cette fonction.

Dynamique. — *Principe de l'inertie :*

1° Un point matériel qui n'est soumis à l'action d'aucune force est en repos ou en mouvement rectiligne.

2° Si deux points matériels ne sont soumis à l'action d'aucune force, les chemins qu'ils parcourent respectivement sur leurs trajectoires rectilignes, pendant une *même durée*, sont proportionnels.

Soient par exemple A et A', les positions de deux mobiles à un instant quelconque, B et B' leurs positions à un autre instant; le rapport $\frac{AA'}{BB'}$ est constant, quels que soient les instants considérés.

Ce principe de proportionnalité s'étend immédiatement à un nombre quelconque de mobiles sur lesquels n'agit aucune force.

Mesure du temps. — On mesure les durées par des nombres proportionnels aux chemins que parcourt, pendant chacune d'elles, un point matériel sur lequel n'agit aucune force. La mesure du temps est ainsi ramenée, au moins théoriquement, à la mesure des segments de droite, et les difficultés signalées plus haut disparaissent. Le choix du mobile et du coefficient constant de proportionnalité détermine l'unité de temps.

On remarquera que la convention précédente revient à considérer l'univers comme une figure mobile; à choisir, pour définir le temps, un point vers lequel n'agit aucune force; et

à prendre, pour la fonction arbitraire qui doit constituer la mesure du temps, la simple fonction :

$$t = ks.$$

Cette convention précise la notion purement cinématique du temps, mais elle n'est pas en contradiction avec elle.

ÉCOLE NORMALE SPÉCIALE DE CLUNY

(CONCOURS DE 1887)

Section des Sciences.

Arithmétique et Algèbre.

— Une personne s'engage à verser, à une compagnie d'assurances, n annuités égales à a, à la condition que la compagnie lui servira, pendant les $2n$ années suivantes, une rente annuelle égale à b ; le premier de ces derniers paiements devant être effectué un an après le versement de la dernière annuité a. — Les intérêts sont composés, et le taux est de r pour un franc, par an.

On demande :

1° De calculer le rapport $\frac{a}{b}$;

2° De déterminer la valeur que doit avoir le nombre n, pour que le rapport $\frac{a}{b}$ ait une valeur donnée p ;

3° D'appliquer la formule trouvée au cas où l'on aurait :

$$x = 0{,}025, \qquad p = \frac{1}{2}.$$

— On donne l'équation du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

et l'on demande de calculer les coefficients a, b et c de telle façon que :

1° La somme des carrés des racines soit égale à un nombre donné m^2 ;

2° La somme du rapport de ces racines et du rapport inverse soit égale à un nombre donné k.

Que doit être le nombre k pour que le problème soit possible, et, lorsqu'il est possible, combien a-t-il de solutions ?

Examiner si la condition trouvée est suffisante pour que les racines de l'équation soient réelles.

Appliquer à l'exemple suivant :

$$m = 14, \qquad k = 14.$$

(On résoudra les équations obtenues, et on en calculera les racines à 0,0001 près).

(3 août, de 7 h. à 11 h.)

Géométrie.

— On représente par a, b, c les trois côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC; on donne le côté a; et l'on sait: 1° que $b = 2c$; 2° que la longueur de la bissectrice de l'angle A du triangle est le $\frac{1}{3}$ de celle de la bissectrice de l'angle extérieur à l'angle A (ces bissectrices étant, comme d'habitude, limitées, d'une part, au sommet A, et de l'autre, à leurs intersections avec le côté BC indéfiniment prolongé).

1° Construire ce triangle;

2 Calculer, en fonction de a, les côtés b et c, ainsi que la surface S du triangle ainsi défini.

Application numérique : $a = 5$ décimètres.

— Une pyramide régulière a pour base un hexagone de côté donné a: son arête latérale est $2a$.

Exprimer, en fonction de a :

1° La surface totale T et le volume V de cette pyramide;

2° Le rayon R de la sphère circonscrite;

3° Le rayon r de la sphère inscrite;

4° Le rayon R′ de la sphère tangente aux douze arêtes de cette pyramide.

Application numérique : $a = 2$ mètres.

Donner les résultats à 0,001 près.

(3 août, de 2 h. à 5 h.)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

La Monnaie, par l'abbé E. Gelin, *docteur en philosophie et en théologie, professeur de Mathématiques supérieures au collège Saint-Quirin*, à Huy (Belgique). — Paris, librairie Guillaumin et Cie, 14, rue Richelieu; 16 pages, in-8°.

Conseils aux candidats a Saint-Cyr et aux autres écoles, par Alphonse Rebière, *ancien élève de l'École Normale supérieure, professeur agrégé de mathématiques au lycée Saint-Louis.* — Paris, librairie Nony et Cie, 17, rue des Écoles; 65 pages, petit in-8°.

Teoria de las aproximaciones numéricas, par Eduardo Mier y Miura, *comandante, capitán de Ingeniores.* — Madrid, imprimerie du Mémorial des Ingénieurs, seconde édition, 1887; 52 pages, in-8°.

Sulle Frazioni décimali periodiche, par A. Lugli; extrait du *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario.* — Rome; 14 pages, in-8°.

ESSAI D'UNE NOUVELLE THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES LOGARITHMES, par V. Jamet, *Docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée de Nantes.* — Paris, librairie Nony et Cie; 16 pages, in-8°; prix, 0 fr. 60 c.

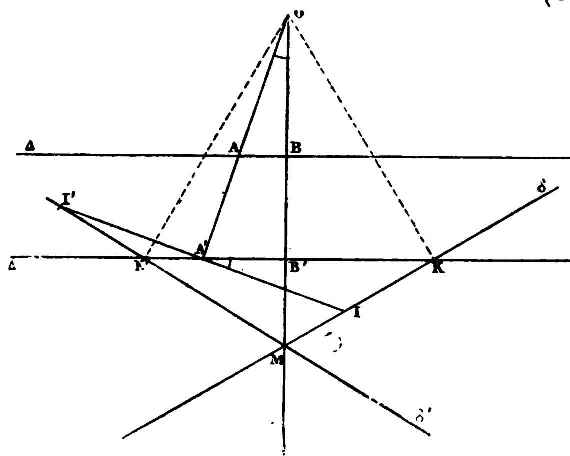
QUESTION 209

Solution par M. D. COTONI, au Lycée d'Alger.

On considère deux droites parallèles Δ, Δ' *et un point fixe* O. *Par* O, *on trace une droite qui rencontre* Δ *en* A *et* Δ' *en* A'. *On élève alors, au point* A', *une perpendiculaire à* AA'; *et l'on prend, sur cette perpendiculaire,* A'I = OA.

Démontrer que le lieu du point I *est un système de deux droites, quand on fait tourner* OAA' *autour du point* O.

On suppose, bien entendu, que la longueur OA *est portée, sur la perpendiculaire dont il est question ci-dessus, dans les deux sens.* (G. L.)



Abaissons, de O, la perpendiculaire OBB' sur les parallèles proposées; nous avons

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{A'I}{OA'} = \frac{OB}{OB'}.$$

On est ramené, par cette remarque, à un théorème connu;

le lieu de I est un système de deux droites δ, δ' construites comme nous allons l'indiquer.

Prenons $B'K = B'K' = OB$; les droites MK, MK' perpendiculaires aux directions OK, OK' sont les droites cherchées δ, δ'.

On peut le reconnaître bien facilement; nous laissons au lecteur le soin d'achever cette démonstration.

On observera que le théorème proposé subsiste si l'on prend $A'I = k.OA$, k désignant une constante quelconque.

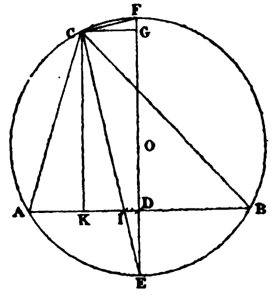
Nota. — Solutions diverses par MM. J. Chapron à Bragelogne; Troille, lycée de Grenoble; Pangaut à l'institution Sainte-Marie, à Besançon; J. Moulet, professeur au collège de Manosque; Léon Crabit, lycée du Havre; Henri Martin, lycée Condorcet; Ignacio Beyens, capitaine du Génie, à Cadix; E. Quintard, à Arbois; Auguste Boutin, professeur au collège de Courdemanche et X.

QUESTION 216

Solution par M. Henri Martin.

Un triangle ABC *étant inscrit à un cercle; soient* EDF *le diamètre perpendiculaire au côté* AB *et* G *la projection de* C *sur* EF. *Cela posé: la demi-somme des côtés* AC, BC *est moyenne proportionnelle entre les segments* DF, GE; *leur demi-différence est moyenne proportionnelle entre les segments* DE, FG. (Catalan.)

Traçons la hauteur CK et la droite CE qui rencontre AB en I. L'angle ECF étant droit, on a



$$\overline{CK}^2 = \overline{DK}^2 = FG.GE.$$

Or, $a^2 = b^2 + c^2 - 2cAK$,

ou
$$AK = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c};$$

et, par suite,

$$\overline{KD}^2 = \left(\frac{c}{2} - AK\right)^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4c^2} = FG.GE.$$

Les triangles DEI, CEG, semblables, donnent

$$\frac{DE}{EG} = \frac{DI}{CG};$$

par conséquent,

$$FG.DE = FG.GE\,\frac{DE}{GE} = CG.DI.$$

Mais

$$DI = \frac{c}{2} - AI = \frac{c}{2} - \frac{bc}{a+b} = \frac{ac-bc}{2(a+b)} = \frac{c(a-b)}{2(a+b)}.$$

Donc

(1) $$FG.DE = \frac{a^2-b^2}{2c}\cdot\frac{c(a-b)}{2(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{4}.$$

On a aussi $$DE.DF = \frac{c^2}{4};$$

et, par suite,

$$(FG.DE) \times (DF.GE) = \frac{(a^2-b^2)^2}{16} = \frac{(a+b)^2}{4}\cdot\frac{(a-b)^2}{4}.$$

D'ailleurs $$FG.DE = \frac{(a-b)^2}{4};$$

donc

(2) $$DF.GE = \frac{(a+b)^2}{4}.$$

Les égalités (1) et (2) établissent la propriété en question.

Nota. — Solutions analogues ou trigonométriques, par MM. Ignacio Beyens, capitaine du génie, à Cadix; Troille, élève au lycée de Grenoble; Alexandre Couvert, élève au lycée Condorcet.

QUESTION 217

Solution par M. Ignacio Beyens, capitaine du génie, à Cadix.

Si l'on a $$a + b + c = 0,$$
les quantités:

(1) $$\begin{cases} a^3b + b^3c + c^3a, \\ a^3c + b^3a + c^3b \end{cases}$$

sont égales, et chacune d'elles, changée de signe, représente un carré parfait. G. L.

De $$a + b + c = o,$$
on tire $$a^3b + b^3c + c^3a = -(b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3)b + b^3c + c^3[-(b+c)] = -(b^4 + 2b^3c + 3b^2c^2 + 2bc^3 + c^4) = -(b^2 + bc + c^2)^2.$$

De même,
$$\begin{aligned} a^3c + b^3a + c^3b &= -(b+c)^3c + b^3[-(b+c)] + c^3b \\ &= -(c^4 + 2bc^3 + 2b^2c^2 + 2b^3c + b^4) \\ &= -(c^2 + bc + b^2)^2. \end{aligned}$$

La proposition se trouve donc établie.

NOTA. — Solutions analogues par MM. J. Chapron, à Bragelogne; A. Boutin, professeur au collège de Courdemanche (Sarthe); E. Quintard, à Arbois; Alexandre Couvert, élève au lycée Condorcet; l'abbé Golin, professeur au collège Saint-Quirin, à Huy (Belgique); Henri Martin, élève au lycée Condorcet; A. Troille, élève au lycée de Grenoble; Léon Crabit, élève au lycée du Hâvre; P. Bourgarel, à Antibes; J. Moulet, professeur au collège de Manosque; Emile Vigarié; G. Russo, à Catanzaro et X...

Dans quelques-unes de ces solutions, on a observé que la valeur commune des expressions (1) peut se mettre sous l'une ou l'autre des formes symétriques suivantes :
$$-(ab + ac + bc)^2,$$
$$-(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)^2,$$
$$\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right)^2.$$

QUESTION 218

Solution par M. René-Henri MARTIN, élève au lycée Condorcet (classe de M. Brisse).

B B' *désignant les aires des bases parallèles d'un tronc de pyramide quelconque, la section* B'', *parallèle et équidistante de ces bases, est la moyenne arithmétique de leurs moyennes arithmétique et géométrique.* (GLORGET.)

En égalant les deux expressions connues (*) du volume du tronc de pyramide, on a

(*) Voyez, à ce propos, la Note de M. Casimir Rey, relative à l'*omniformule* (*Journal*; 1886, p. 60).

$$\frac{H}{3}(B + B' + \sqrt{BB'}) = \frac{H}{6}(B + B' + 4B''),$$

et, après simplifications,

$$B'' = \frac{\frac{B + B'}{2} + \sqrt{BB'}}{2}.$$

Nota. — Solutions analogues par MM. F. Russo, à Catanzaro. E. Quintard, à Arbois; J. Chapron, à Bragelogne; J. Moulet, professeur au collège de Manosque.

M. Ignacio Beyens donne, outre la démonstration basée sur l'*omniformule*, une démonstration directe.

M. l'abbé Gelin et A. Boutin établissent directement l'égalité proposée. Voici la démonstration en question, qui est très simple.

En désignant par a, a', a'' des côtés homologues des polygones semblables B, B', B'', on a:

$$\frac{B}{a^2} = \frac{B'}{a'^2} = \frac{B''}{a''^2},$$

ou

$$\frac{\sqrt{B}}{a} = \frac{\sqrt{B'}}{a'} = \frac{\sqrt{B''}}{a''}.$$

Or

$$a'' = \frac{a + a'}{2}.$$

Donc

$$\sqrt{B''} = \frac{\sqrt{B} + \sqrt{B'}}{2};$$

d'où

$$B'' = \frac{B + B' + 2\sqrt{BB'}}{4} = \frac{\frac{B+B'}{2} + \sqrt{BB'}}{2}.$$

QUESTION 219

Solution par M. Henri Martin, élève au lycée Condorcet.

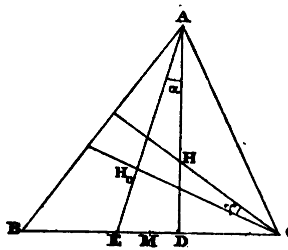
Soient H *l'orthocentre et* H_0 *le point réciproque, dans le triangle* ABC; *si l'on pose*

$$HAH_0 = \alpha, \qquad HBH_0 = \beta, \qquad HCH_0 = \gamma,$$

l'on a

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = 0, \qquad \text{(Boutin.)}$$

Soit D le pied de la hauteur, prenons BE = DC; et soit M le milieu de BC. Le triangle AED donne



$$ED = AD \operatorname{tg} \alpha,$$

ou
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2MD}{AD}.$$

Or

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2,$$

relation qui peut s'écrire

$$2a.MD = c^2 - b^2.$$

On a donc
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c^2 - b^2}{a.AD} = \frac{c^2 - b^2}{2s}.$$

On aurait, de même :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a^2 - c^2}{2s}.$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{b^2 - a^2}{2s}.$$

En additionnant, on trouve

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = 0.$$

Remarques. — 1° Les formules précédentes donnent aussi

$$a^2 \operatorname{tg} \alpha + b^2 \operatorname{tg} \beta + c^2 \operatorname{tg} \gamma = 0.$$

2° On peut encore observer que si m_a, m_b, m_c représentent les longueurs des médianes, on a la relation

$$m_a^2 \operatorname{tg} \alpha + m_b^2 \operatorname{tg} \beta + m_c^2 \operatorname{tg} \gamma = 0.$$

En effet :
$$2m_a^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2,$$

on a:
$$2m_b^2 + \frac{b^2}{2} = c^2 + a^2,$$

$$2m_c^2 + \frac{c^2}{2} = a^2 + b^2.$$

Par suite,

$$2(m_a^2 \operatorname{tg} \alpha + m_b^2 \operatorname{tg} \beta + m_c^2 \operatorname{tg} \gamma) + \frac{3}{2}(a^2 \operatorname{tg} \alpha + b^2 \operatorname{tg} \beta + c^2 \operatorname{tg} \gamma)$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma);$$

puis, la relation indiquée.

Nota. — Autres solutions par MM. Ignacio Beyens, capitaine du Génie à Cadix, et l'abbé E. Gelin, professeur au collège Saint-Quirin, à Huy (Belgique).

QUESTIONS PROPOSÉES

274. — On donne deux droites rectangulaires Ox, Oy et un point P; soit Δ une droite quelconque, passant par P, et rencontrant: Ox, en A; Oy, en B.

On élève, en P, une perpendiculaire Δ' à Δ; Δ' rencontre: Ox, en A'; Oy, en B'. On abaisse de ces points A', B' des perpendiculaires sur OP et ces droites coupent Δ aux points A'', B''. Démontrer que A''B'' = AB. (*Mannheim.*)

275. — Rendre calculable, par logarithmes, la quantité

$$\sin(x+y+z)\sin(x+2y+z) - \sin x \sin(x+y) - \sin z \sin(y+z).$$

(*E. Catalan.*)

ERRATUM

L'énoncé de la question 273 (ligne 3) doit être rectifié ainsi

Au lieu de *forces égales*, lisez FORCES PROPORTIONNELLES, RESPECTIVEMENT, A $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$, $\sin\frac{C}{2}$.

M. Neuberg, qui m'a signalé cette erreur, a donné, à l'énoncé rectifié, une autre forme; il observe qu'on peut supposer les forces appliqués en I, égales, mais dirigées suivant les droites obtenues en joignant ce point aux points de contact du cercle tangent aux côtés du triangle ABC,

Nous publierons d'ailleurs prochainement une note de M. Neuberg, traitant du rôle que l'on peut faire jouer à la mécanique dans les recherches géométriques; d'élégantes solutions de la question 273, et des questions 240 et 241, se trouvent comprises dans ce travail. G. L.

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 1516-2-8.

GÉOMÉTRIE ET MÉCANIQUE

Par M. **Neuberg,** professeur à l'Université de Liège.

La question 273 (*J. M. E.*, 1888, p. 23) peut être rectifiée ainsi :

Soit I *le centre d'un cercle touchant les trois côtés d'un triangle* ABC *aux points* A′, B′, C′. *On applique, en ce point, trois forces égales, dirigées, respectivement, suivant* IA′, IB′, IC′. *Démontrer que la résultante de ces trois forces passe par le centre du cercle circonscrit au triangle considéré.*

Les premières notions sur la composition et la décomposition des forces conduisent souvent, de la manière la plus simple, à des propositions fort curieuses de géométrie. Voici quelques applications de ce genre. Sans être absolument nouvelles, elles montrent bien l'excellent parti que la géométrie élémentaire peut tirer de la mécanique. Dans les développements qui suivent, je rencontrerai la question 273, et les questions 240, 241, que j'ai proposées dans le *J. M. E.*, 1887, p. 23.

1. — Soient: ABC un triangle quelconque, $A_1B_1C_1$ le triangle complémentaire (A_1 est le milieu de BC...), M un point quelconque du point ABC. Pour trouver la résultante de trois forces représentées par les droites MA, MB, MC, prolongeons MA_1 de $A_1M_a = MA_1$; MM_a est la résultante des forces MB, MC. Si N est le milieu de AM_a, et M′ le symétrique de M, par rapport à N, la résultante cherchée est représentée par MM′.

Or, les droites AA_1, MN se coupent an centre de gravité G du triangle AMM_a. Donc $AG = 2GA_1$, et G est aussi le centre de gravité de ABC. De plus $MG = \frac{2}{3}\,MN = \frac{1}{3}\,MM'$. Donc la résultante de MA, MB, MC est dirigée suivant la droite MG

qui passe au centre de gravité du triangle ABC; de plus, elle est égale à 3MG.

En procédant dans un autre ordre, on voit que AM_a, BM_b, CM_c se coupent en leur milieu commun N (*), et que N est le complémentaire de M. De même, M′ est l'anti-complémentaire de M (question 240, *J. M. E.*) (**).

Si l'on pose $MA = \alpha$, $MB = \beta$, $MC = \gamma$, $MM' = \rho$, et qu'on projette les forces sur deux axes rectangulaires Mx, My, on trouve aisément

$$\rho \cos M'Mx = \alpha \cos AMx + \beta \cos BMx + \gamma \cos CMx,$$
$$\rho \sin M'Mx = \alpha \sin AMx + \beta \sin BMx + \gamma \sin CMx,$$

d'où, en faisant la somme des carrés :

$$\rho^2 = 9\overline{MG}^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta \cos AMB + 2\alpha\gamma \cos AMC + 2\beta\gamma \cos BMC.$$

2. — Prenons, pour M, le centre O du cercle circonscrit à ABC. Les raisonnements faits ci-dessus prouvent que les hauteurs de ABC concourent en un même point H; que $AH = OO_a = 2OA_1 \ldots$; que les droites AO_a, AO_b, AO_c concourent au milieu M de OH; que G partage OH dans le rapport 1 : 2; enfin, que OH est la résultante des forces égales représentées par OA, OB, OC. La valeur de ρ^2 donne, dans le cas actuel,

$$\overline{OH}^2 = R^2(3 + 2\cos 2A + 2\cos 2B + 2\cos 2C) = R^2(1 - 8\cos A \cos B \cos C) \ (***).$$

3. — Les bissectrices intérieures du triangle ABC rencontrent la circonférence circonscrite, aux points A_2, B_2, C_2, sommets d'un triangle dont AA_2, BB_2, CC_2 sont les hauteurs. Donc OI est la résultante des trois forces OA_2, OB_2, OC_2. Conséquemment,

$$\overline{OI}^2 = R^2(1 - 8\cos A_2 \cos B_2 \cos C_2) = R^2\left(1 - 8\sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C\right).$$

(*) Théorème énoncé dans le *J. M. E.*, par M. d'Ocagne.

(**) Nous avons reçu diverses solutions de cette question par MM. Henry Galopeau; A. Larcher, élève de l'institution Noiret, à Mantes; Ignacio Beyens, capitaine du Génie à Cadix; Emile Vigarié; Jannot, employé des ponts et chaussées à Mantes.

(***) Comparez *Nouvelles Annales*, 1883, p. 525.

De même, si les bissectrices extérieures du triangle ABC rencontrent la circonférence O aux points A_3, B_3, C_3, et se rencontrent, deux à deux, en I_a, I_b, I_c, OI_a est la résultante des forces OA_2, OB_3, OC_3 :

$$\overline{OI_a}^2 = R^2(1 + 8 \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C).$$

4. — Soient A′, B′, C′ les points de contact des côtés de ABC avec le cercle inscrit; le système des droites IA′, IB′, IC′ étant homothétique au système OA_2, OB_2, OC_2, le centre de gravité G′ du triangle A′B′C′ est sur la droite OI. Donc

$$IG' = \frac{OI.r}{3R}.$$

Observons aussi que l'orthocentre du triangle A′B′C′ est situé sur la même droite OI.

Des remarques analogues sont applicables aux cercles ex-inscrits.

(A suivre).

NOTE SUR LES ÉLÉMENTS BROCARDIENS

Par MM. **E. Lemoine** et **E. Vigarié.**

Nous revenons sur une question, déjà traitée dans ce Journal, afin de la préciser et pour éviter la confusion que certaines erreurs, qui se sont glissées dans différents mémoires traitant ce sujet, pourraient produire dans l'esprit du lecteur. Cette confusion s'est déjà malheureusement traduite par de nombreuses discordances dans les désignations d'un même point.

I

POINTS BROCARDIENS

1. — M. E. Lemoine a montré (*) comment, de la connaissance du *point de Lemoine*, on peut déduire la position des

---

(*) E. Lemoine. — Sur une généralisation des propriétés relatives au cercle de Brocard et au point de Lemoine (*Nouvelles Annales de Mathématiques. 3me série, tome* IV. *Mai* 1885, page 202 et suiv.).

points de Brocard; il a ensuite généralisé cette notion qui a donné naissance aux *points Brocardiens* (*).

Soient: M un point quelconque du plan d'un triangle ABC; x, y, z ses coordonnées normales; α, β, γ ses coordonnées barycentriques et M′, M″, M‴ les points où AM, BM, CM rencontrent, respectivement, BC, CA, AB.

Au point donné M, on peut faire correspondre deux points M_δ, M_ρ; d'après la construction suivante:

Je pars de M′ (en suivant, sur le périmètre du triangle, le sens ABC), et j'appelle μ l'intersection de CA (qui suit BC) avec la parallèle menée, par M′, au troisième côté AB; de même ν, λ les intersections de AB, BC, respectivement, avec les parallèles menées par M″, M‴ à BC, CA. Les trois droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ se coupent en un même point M_δ, qu'on appelle *Point direct* par rapport à M.

Je pars de M′ (en suivant, sur le périmètre du triangle, le sens CBA), et j'appelle μ', ν', λ' les intersections de AB, BC, CA respectivement, avec les parallèles menées par M′, M″, M‴ à CA, AB, BC. Les trois droites $A\lambda'$, $B\mu'$, $C\nu'$, se coupent en un même point M_ρ que l'on appelle point rétrograde par rapport à

On dit aussi que M_δ, M_ρ sont les *Brocardiens* de M, et alors M_δ est le *Brocardien direct* de M, et M_ρ, le *Brocardien rétrograde.*

2. — Il est fatile de voir que les équations des droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ sont, respectivement :

$$\frac{Y}{X} = \frac{zc}{xb}, \qquad \frac{X}{Z} = \frac{yb}{za}, \qquad \frac{Z}{Y} = \frac{xa}{yc}.$$

Les coordonnées normales des points brocardiens de M sont donc (**), pour le Brocardien direct M_δ :

$$X : Y : Z = bxy : cyz : azx.$$

(*) Propriétés relatives à deux points ω, ω' du plan d'un triangle ABC, qui se déduisent d'un point K quelconque du plan, comme les points de Brocard se déduisent du point de Lemoine (*Association française.* Août 1885, page 23 et suiv.).

(**) En se reportant au Mémoire cité plus haut, que M. E. Lemoine a donné dans les *Nouvelles Annales,* on voit qu'il y a indiqué, pour coordonnées de ω celles qui conviennent à ω', et inversement. Le lecteur devra tenir compte de cette erreur; elle se reproduit dans tous le cours du travail mentionné ; les expressions qui ne dépendent que d'un des points ω,ω' doivent y être remplacées par celles qui ne dépendent que de l'autre.

De même, pour le Brocardien rétrograde M_ρ :

$$X : Y : Z : = czx, axy : byz$$

Ces formules montrent qu'en coordonnées barycentriques, on aura :

Pour le Brocardien direct M_δ :

$$\alpha' : \beta' : \gamma' = \frac{1}{\gamma} : \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta};$$

Pour le Brocardien rétrograde M_ρ :

$$\alpha'' : \beta'' : \gamma'' = \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma} : \frac{1}{\alpha}.$$

Si donc les quantités A, B, C sont telles que

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C},$$

les points Brocardiens pourront encore être définis par les égalités (*) :

$$M_\delta \ldots\ldots C\alpha' = A\beta' = B\gamma'$$
$$M_\rho \ldots\ldots B\alpha'' = C\beta'' = A\gamma''$$

II

POINTS DE BROCARD

3. — Prenons, pour point M, le *point de Lemoine* K, (a, b, c) : les Brocardiens correspondants seront les *points de Brocard*. D'après les formules précédentes, les coordonnées de ces points sont :

Pour Ω, point direct de Brocard.

$$X : Y : Z = \frac{b}{c} : \frac{c}{a} : \frac{a}{b};$$

pour Ω', point rétrograde de Brocard,

$$X : Y : Z = \frac{c}{b} : \frac{a}{c} : \frac{b}{a};$$

ou en coordonnées barycentriques (**)

(*) Il suit de là que, dans l'*Étude bibliographique et terminologique du triangle* publié par M. E. Vigarié, dans le *Journal de mathématiques spéciales* (1887) il faudra lire (page 156, lignes 7 et 8) M_δ à la place de M_ρ, et réciproquement.

(**) Nous avons vérifié graphiquement que, sur la planche annexée au Mémoire de M. H. Brocard *(Associat. franç. Rouen 1883)* et intitulé :

$$\Omega \ldots\ldots \alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2};$$

$$\Omega' \ldots\ldots \alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2}.$$

Les points Ω et Ω' de Brocard sont deux points inverses, définis par les égalités d'angles :

(1) $\Omega AC = \Omega CB = \Omega BA = \Omega' CA = \Omega' AB = \Omega' BC = \omega$,

ω étant l'angle de Brocard déterminé par les conditions :

$$\cot g\, \omega = \cot g\, A + \cot g\, B + \cot g\, C, \quad (\omega < 90^o)$$

4. — On a proposé divers moyens pour distinguer entre eux les deux points de Brocard; nous allons les indiquer ici, et spécifier, dans chaque système adopté, les termes qui désignent le même point.

M[lle] C. A. Scott a proposé *(Educational Times, Juillet 1883)* d'appeler *premier point de Brocard* le point ω', et *second point de Brocard* le point ω, quand on a, entre les angles, les égalités

(2) $\omega AC = \omega CB = \omega BA = \omega' AB = \omega' CA = \omega' BC$.

On voit facilement, d'après ce que nous avons dit, que ω est le *point direct de Brocard* et ω' le *point rétrograde.*

M. T. C. Simmons adopte, comme sens positif dans un triangle, le sens ABC, c'est-à-dire celui où les lettres se succèdent dans leur ordre naturel, et sens négatif; le sens contraire CBA. Il propose alors *(Educational Times, Décembre 1886)* d'appeler *point positif de Brocard* le point O'.

$$O'AB = O'CA = O'BC = \omega$$

tel que dans les égalités précédentes, les sommets du triangle se présentent dans le sens positif; c'est donc, d'après (1), le *point rétrograde de Brocard* Ω'. Le *point négatif de Brocard* est donc le *point direct* Ω.

On peut encore, comme le fait observer M. T. C. Simmons

Nouvelles propriétés du triangle, le point direct de Brocard est celui qui est marqué O'; le point rétrograde, O. Pour que la planche et le texte du mémoire concordent, il faut donc lire, dans le cours du Mémoire, O à la place de O' *et vice versa, puisque* $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{a}{b}$ sont données, dans le texte, comme les coordonnées de O; or, d'après la planche, ce sont celles qui conviennent au point direct O', etc.

(*Proceedings*, 7 avril 1887, p. 296), observer que, dans le triangle $K\Omega\Omega'$ formé par le point de Lemoine et les deux points de Brocard, le *point positif* de Brocard est le premier qu'on rencontre quand, en partant de K, on parcourt le périmètre de $K\Omega\Omega'$ dans le sens positif de ABC.

En résumé

Le point direct de Brocard Ω	*Le point rétrograde de Brocard* Ω'
$x:y:z=\frac{b}{c}:\frac{c}{a}:\frac{a}{b}$,	$x:y:z=\frac{c}{b}:\frac{a}{c}:\frac{b}{a}$,
$\alpha:\beta:\gamma=\frac{1}{c^2}:\frac{1}{a^2}:\frac{1}{b^2}$,	$\alpha:\beta:\gamma=\frac{1}{b^2}:\frac{1}{c^2}:\frac{1}{a^2}$,
défini par les égalités	*défini par les égalités*
$\Omega AC=\Omega CB=\Omega BA=\omega$,	$\Omega' CA=\Omega' AB=\Omega' BC=\omega'$
est aussi appelé :	*est aussi appelé :*
Second point de Brocard,	*Premier point de Brocard,*
ou	*ou*
Point négatif de Brocard.	*Point positif de Brocard.*

Nous adopterons, désormais, les termes : *point direct, point rétrograde*, qui s'appliquent non seulement aux points de Brocard, mais à tous les points brocardiens en général.

III

DROITES BROCARDIENNES (*)

La construction qui a permis à M. Lemoine de déduire les points Brocardiens d'un point quelconque du plan d'un triangle, lui a donné également les droites brocardiennes dérivées d'une droite quelconque du plan. Il n'est pas moins utile d'éviter toute confusion à leur propos.

Soient : ABC un triangle, Δ une droite qui coupe BC, CA, AB, respectivement, en A', B', C'. Je parcours le périmètre du triangle dans le sens ABC.

Par A', je mène à CA (qui suit BC), une parallèle qui coupe AB en A'_c.

(*) Voir : Lemoine. *A. F.*, Nancy, août 1886, p. 85.
— de Longchamps. *J. E.*, novembre 1886, p. 217.

Par B′, je mène à AB (qui suit CA), une parallèle qui coupe BC en B'_a.

Par C′, je mène à BC (qui suit AB), une parallèle qui coupe CA en C'_b.

Je parcours le périmètre dans le sens CBA :

Par A′, je mène à BA (qui suit CB), une parallèle qui coupe AC en A'_b.

Par B′, je mène à AC (qui suit BA), une parallèle qui coupe CB en C'_a.

Par C′, je mène à CB (qui suit AC), une parallèle qui coupe BA en B'_c.

Les points A'_c, B'_a, C_b sont sur une droite Δ_δ, que nous appellerons *Brocardienne directe* de Δ; les points A'_b, C'_a, B'_c sont sur une droite Δ_ρ que nous appellerons *Brocardienne rétrograde* de Δ.

Si, en cordonnées normales, Δ a pour équation :

$$AX + BY + CZ = o;$$

Δ_δ, Δ_ρ auront respectivement pour équations :

$$\frac{X}{cB} + \frac{Y}{aC} + \frac{Z}{bA} = o, \qquad \frac{X}{bC} + \frac{Y}{cA} + \frac{Z}{aB} = o;$$

a, *b*, *c* désignant, comme à l'ordinaire, les côtés du triangle de référence.

Si, en coordonnées barycentriques, l'équation de Δ est

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = o;$$

les équations de Δ_δ, Δ_ρ seront, respectivement :

$$\frac{\alpha}{B} + \frac{\beta}{C} + \frac{\gamma}{A} = o, \qquad \frac{\alpha}{C} + \frac{\beta}{A} + \frac{\gamma}{B} = o.$$

On peut, en outre, observer que si Δ est *harmoniquement* associée à un certain point D, les brocardiennes Δ_δ, Δ_ρ seront *harmoniquement associées* aux points D_δ, D_ρ, brocardiens de D.

Nous espérons qu'après les définitions et le tableau des concordances des diverses notations, les erreurs commises seront faciles à reconnaître pour le passé, et à éviter pour l'avenir.

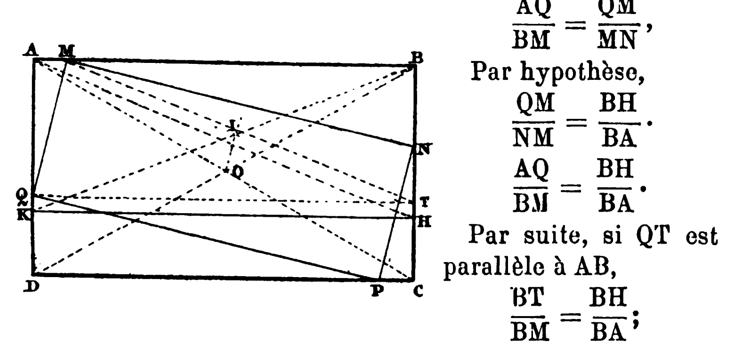
EXERCICE GÉOMÉTRIQUE

Inscrire, à un rectangle donné, un rectangle semblable à un rectangle donné.

Soit MNPQ le rectangle cherché inscrit au rectangle ABCD, et semblable au rectangle ABHK.

La similitude des triangles AMQ, BNM donne

$$\frac{AQ}{BM} = \frac{QM}{MN},$$



Par hypothèse,

$$\frac{QM}{NM} = \frac{BH}{BA}.$$

$$\frac{AQ}{BM} = \frac{BH}{BA}.$$

Par suite, si QT est parallèle à AB,

$$\frac{BT}{BM} = \frac{BH}{BA};$$

Ainsi, MT est parallèle à AH.

Il suit de là que le milieu I de MT est sur BK. D'ailleurs le point T se trouvant, évidemment, sur le cercle circonscrit à MNPQ, qui a pour centre le centre O du rectangle ABCD, le milieu I de MT se trouve sur la perpendiculaire abaissée de O sur MT, ou sur AH.

De là, résulte la construction suivante : *La perpendiculaire abaissée du centre* O *du rectangle* ABCD, *sur la diagonale* AH *du rectangle* ABHK, *coupe la diagonale* BK *au point* I. *La parallèle à* AH, *menée par* I, *coupe* AB *en* M *et* BC *en* T. *Enfin, la parallèle à* AB, *menée par* T, *coupe* AD *en* Q. *Ayant les sommets* M *et* Q, *on complète le rectangle* MNPQ.

La discussion est d'ailleurs des plus faciles (*).

(M. d'O.)

(*) Comparez : CATALAN, *Théorèmes et problèmes de Géométrie élementaire*, 6me édition, p. 186.

ESSAI
SUR LA
GEOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. G. de Longchamps.

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, 1888, voir p. 30.)

65. Les solutions par la fausse équerre. *La solution de Mascheroni.* — Ayant jalonné, dans la région accessible V, les lignes de visée OA, OB, on relève l'angle AMB; puis on se transporte sur OB, en partant de O, jusqu'à ce qu'on ait trouvé un point N tel que ANB = AMB. La droite MN est donc anti-parallèle à AB. On relève alors l'angle ONM, et, par un point M′, arbitrairement choisi sur OM, on tire un alignement M′N′, de façon que OM′N′ = ONM. La droite M′N′ ainsi obtenue, est parallèle à MN.

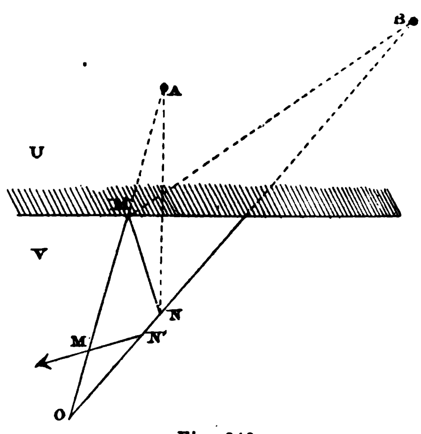


Fig. 216.

Telle est, arrangée par Servois, et aussi simplifiée que possible, la meilleure des solutions de Mascheroni; elle offre, au plus haut degré, le caractère pratique nécessaire aux solutions qu'on devrait nommer, dans cette géométrie que nous développons ici, *les solutions générales* (*); pour exprimer

(*) Ces solutions générales, on le comprend bien, n'ôtent rien à l'intérêt qui doit s'attacher aux solutions particulières. Sans doute, celles-ci ne pourront pas toujours être employées; et, devant certaines difficultés pra-

qu'elles répondent à toutes les exigences des situations diverses susceptibles d'être imaginées. On observera, en effet, que les tracés indiqués plus haut peuvent être réalisés dans un espace de terrain aussi limité qu'on le voudra.

Ajoutons que la solution précédente est bien propre à montrer la supériorité de la fausse équerre sur l'équerre ordinaire dans les opérations effectuées sur le terrain. Pour résoudre ce problème avec l'équerre ordinaire, il faudrait trouver, sur la partie de OA qui est accessible, un point d'où le segment AB serait vu sous un angle droit. Mais si la distance AB est relativement petite, le cercle décrit sur AB comme diamètre est situé, tout entier, dans la région inaccessible V; la construction donnée devient illusoire. L'emploi de la fausse équerre est donc préférable.

Ce caractère de généralité, que nous avons reconnu à la solution de Mascheroni, appartient aussi à celle que nous allons exposer maintenant: on verra, au chapitre suivant, l'avantage qu'elle présente sur celle de Mascheroni.

Seconde solution. — Prenons, sur une droite Δ, tracée dans la partie accessible, deux points quelconques C, D; puis jalonnons, comme l'indique la figure: 1° les prolongements de AC et de BD, 2° les droites DP et CQ, parallèles, respectivement aux prolongements CX, DY, BC et de AD.

Nous allons montrer que PQ est parallèle à AB.

Les triangles semblables AOC, CO'P donnent

$$\frac{AO}{CO'} = \frac{CO}{PO'},$$

ou

$$(1) \qquad CO.CO' = AO.PO'.$$

De même, dans les triangles BOD, DO'Q,

$$(2) \qquad DO.DO' = BO.QO'.$$

D'ailleurs, OCO'D étant un parallélogramme, on a

$$OD = CO', \quad CO = DO'.$$

---

tiques, elles devront faire place à l'une des solutions générales; mais, dans d'autres cas, si les difficultés auxquelles nous faisons allusion n'existent pas, elles devront au contraire être préférées aux solutions générales; car, le plus souvent, elles nécessitent moins de travail.

Les égalités (1) et (2) prouvent que

$$AO.PO' = BO.QO',$$

égalité que l'on peut écrire ainsi :

$$\frac{AO}{BO} = \frac{QO'}{PO'}$$

Les deux triangles AOB, QO'P ont un angle égal, compris entre côtés proportionnels ; ils sont donc semblables. Les

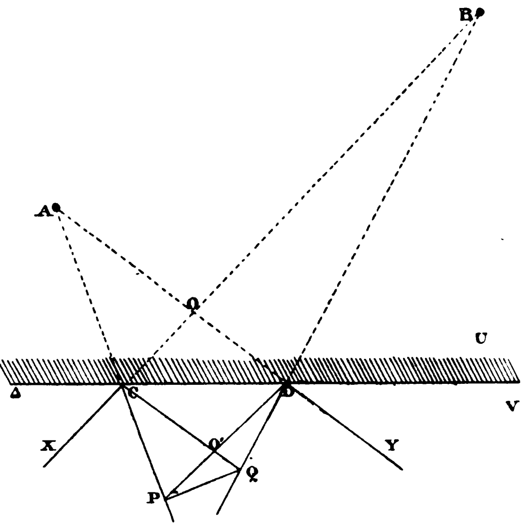


Fig. 217.

angles ABO, O'PQ étant égaux, BO étant parallèle à PO', et les angles étant alternes internes, les droites AB, PQ sont parallèles.

Observons que les points C, D sont arbitrairement choisis; par suite, le quadrilatère CDPQ est aussi limité qu'on le voudra, la construction précédente répond complètement au problème que nous venons de traiter, dans toutes les conditions plus ou moins difficiles qui peuvent lui être imposées. Enfin, suivant le terme employé plus haut, c'est une solution *générale* du problème qui vient de nous occuper.

Cette remarque importante s'applique encore à la solution suivante.

66. Solution de Poncelet. — Le problème actuel a été envisagé par Poncelet (*) lorsqu'il a traité l'exercice suivant :

Étant donnés un parallélogramme et une droite indéfinie; lui mener, par un point donné, une parallèle, en ne se servant que de la règle seule.

On observera d'abord les termes dans lesquels la question est posée.

Au premier abord, ces mots: *la règle seule* semblent faire supposer que le problème en question ressort de la géométrie de la règle; ce qui ne peut pas être. Mais Poncelet s'accorde, dans le domaine de l'épure, la présence d'un parallélogramme, comme le faisait Lambert (*première partie*, § 22) pour résoudre le même problème. En nous plaçant au point de vue des tracés que l'on peut exécuter sur un terrain, nous revenons ici sur cette question; et nous allons, après l'avoir dégagée de certaines considérations de géométrie supérieure, exposer l'élégante construction de Poncelet.

Nous expliquerons d'abord comment on ramène le problème posé à la question suivante:

Deux parallèles Δ, Δ′ *étant jalonnées sur un terrain, leur mener*; *par de simples alignements, une parallèle, par un point donné* M.

Effectuons, dans l'ordre indiqué, les alignements 1, 2, ... 7; nous obtenons ainsi un certain point M′ : MM′ est la droite cherchée.

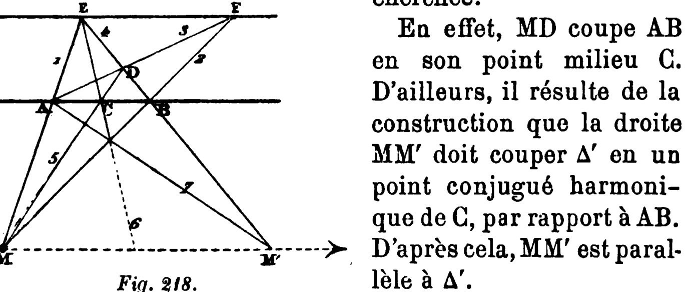


Fig. 218.

En effet, MD coupe AB en son point milieu C. D'ailleurs, il résulte de la construction que la droite MM′ doit couper Δ′ en un point conjugué harmonique de C, par rapport à AB. D'après cela, MM′ est parallèle à Δ′.

Cette remarque étant faite, nous pourrons considérer le pro-

(*) Voyez: *Applications d'Analyse et de Géométrie*, par J.-V. Poncelet; p. 437.

blème qui nous occupe comme résolu par des alignements seuls, si nous pouvons tracer, dans la partie accessible du terrain, des parallèles à la droite inaccessible proposée. Voici la solution de Poncelet.

Fig. 219.

Soient O, O′ deux points visibles sur la droite inaccessible. On jalonne les lignes de visée AO, AO′; et on leur mène les parallèles CD, CB. Soit R un point arbitrairement choisi sur AC; les lignes de visée RO, RO′ permettent de déterminer les points P, Q ; la droite PQ est parallèle à OO′.

En effet, les triangles semblables RAO, RCQ, d'une part; RAO′, RCP, d'autre part; donnent :

$$\frac{RA}{RC} = \frac{AO}{CQ}, \quad \frac{RA}{RC} = \frac{AO'}{CP};$$

et, par suite,

$$\frac{AO}{AO'} = \frac{CQ}{CP}.$$

Les triangles OAO′, QCP ont donc un angle égal compris entre deux côtés proportionnels; ainsi, ils sont semblables ; d'où l'on peut conclure que PQ est parallèle à OO′.

67. La solution directe par les alignements. — Le tracé que nous venons d'indiquer d'après Poncelet, donne un alignement PQ parallèle à OO′. Le même procédé permet d'obtenir un second alignement : puis, au moyen de ces deux parallèles tracées dans les parties accessibles, on peut, comme nous l'avons montré, obtenir une parallèle passant par un point donné. En un mot, la difficulté proposée se trouve tranchée par deux opérations successives.

Proposons-nous de traiter le problème en question *directement*, c'est-à-dire par un tracé donnant immédiatement la paral-

lèle cherchée. Poncelet *(loc. cit.)* a résolu ce tracé direct, par deux constructions; nous allons faire connaître la plus simple.

Soient : OO′ la droite inaccessible, M le point par lequel on propose de mener une droite parallèle à OO′, ABCD le parallélogramme situé dans la partie accessible et servant de base aux constructions nécessaires, lesquelles sont exécutées, comme le montre la figure, dans l'ordre 1, 2, ... 5. On obtient ainsi un point M′ ; MM′ est la parallèle demandée.

En effet, traçons OR, et prolongeons cette droite jusqu'à ce

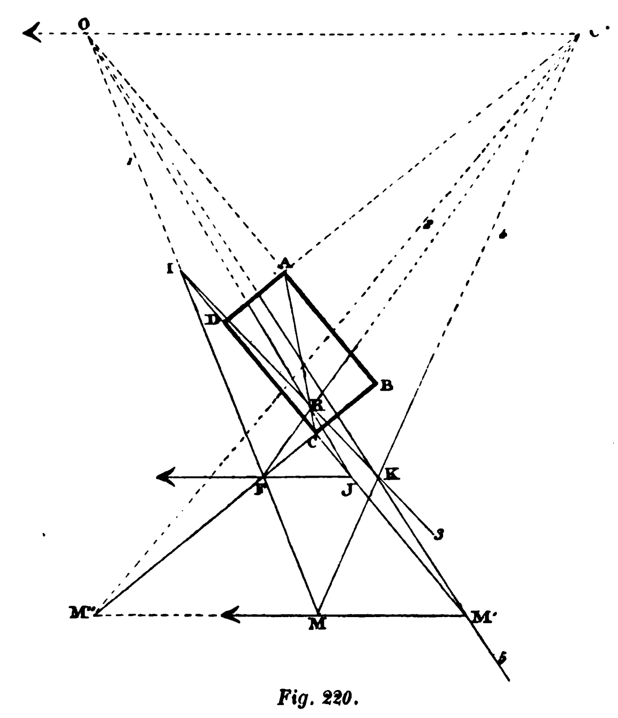


Fig. 220.

qu'elle rencontre CD en J ; FJ, comme nous l'avons observé au paragraphe précédent, est parallèle à OO′. D'autre part, les triangles JRI, FRI coupés, respectivement par les transversales OKM′, MKO′, donnent

$$\frac{\text{M'J}}{\text{M'I}} = \frac{\text{OJ}}{\text{OR}} \cdot \frac{\text{KR}}{\text{KI}}, \quad \frac{\text{MF}}{\text{MI}} = \frac{\text{O'F}}{\text{O'R}} \cdot \frac{\text{KR}}{\text{HI}}.$$

Les droites FJ, O'O étant parallèles, comme nous l'avons rappelé, on a

$$\frac{OJ}{OR} = \frac{O'F}{O'R};$$

et, par suite,
$$\frac{M'J}{M'I} = \frac{MF}{MI}.$$

Cette égalité prouve que MM' est parallèle à FJ et, par conséquent parallèle à OO'.

Telle est la solution directe, donnée par Poncelet, et déduite par lui de considérations inutiles à rappeler dans ce livre élémentaire.

On peut observer, et cette remarque a été faite par Poncelet, que la construction précédente est susceptible d'une vérification, d'autant plus précieuse qu'elle exige un grand nombre d'alignements, dont quelques uns peuvent se couper sous des angles très aigus.

La droite O'S, prolongée jusqu'à sa rencontre avec BC, donne un point M'' qui appartient à la droite MM'. Cette propriété est une conséquence de la remarque faite au paragraphe précédent, remarque déjà rappelée tout à l'heure, et en vertu de laquelle M'M'' est parallèle à OO'.

Malgré cette vérification, le tracé de la figure 220 reste peu pratique, à cause des jalonnements nombreux qu'il nécessite; il faut aussi reconnaître que la construction indiquée se fixe difficilement dans la mémoire; or, c'est une qualité indispensable des solutions de la géométrie pratique, d'être facilement saisies et retenues.

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS *(Suite.)*

Par M. **Boutin**, professeur au collège de Courdemanche.

---

62. — Sommer la suite :

$$S = \sum_1^x \frac{ax + b}{x(x+1)(x+2)}.$$

On a :

$$\sum \frac{ax+b}{x(x+1)(x+2)} = a\sum \frac{1}{(x+1)(x+2)} + b\sum \frac{1}{x(x+1)(x+2)}.$$

Mais :

$$\sum_1^x \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \sum_2^{x+1} \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x+2},$$

$$\sum \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(x+1)(x+2)};$$

d'où $$S = \frac{a}{2} - \frac{b}{4} + \frac{a}{x+2} - \frac{b}{2(x+1)(x+2)};$$

et, pour $x = \infty$,

$$\lim. S = \frac{1}{2}\left(a + \frac{b}{2}\right).$$

63. — Sommer la suite :

$$S = \sum_1^x \frac{ax^2+bx+c}{x(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

La méthode des coefficients indéterminés permet de décomposer le terme général sous la forme :

$$\frac{A}{x(x+1)} + \frac{B}{(x+1)(x+2)} + \frac{C}{(x+2)(x+3)}.$$

On trouve :

$$A = \frac{c}{6}, \quad B = \frac{b-a}{2} - \frac{c}{3}, \quad C = \frac{1}{2}\left(3a - b + \frac{c}{3}\right),$$

et, par suite,

$$S = \frac{c}{6}\sum_1^x \frac{1}{x(x+1)} + \left(\frac{b-a}{2} - \frac{c}{2}\right)\sum_1^x \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(3a - b + \frac{c}{3}\right)\sum_1^x \frac{1}{(x+2)(x+3)}.$$

Mais :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_1^x \frac{1}{x(x+1)} = 1 - \frac{1}{x+1}, \\ &\sum_1^x \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \sum_2^{x+1} \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x+2}, \\ &\sum_1^x \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \sum_3^{x+2} \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{x+3}. \end{aligned} \right.$$

Donc $$S = \frac{c}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2} - \frac{c}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(3a - b + \frac{c}{3}\right) - \frac{6(x+1)}{c}$$
$$- \frac{3b-3a-2c}{6(x+2)} - \frac{9a-3b+c}{6(x+3)};$$

et, pour $x = \infty$: $$\lim S = \frac{9a+3b+2c}{36}.$$

Autrement :

$$S = a\sum_1^n \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} + b\sum_1^x \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} + c\sum_1^x \frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

Mais

$$\sum \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{3}{2}\sum \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{2}\sum \frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

Tenant compte des formules (1), et d'autres formules connues, on trouve

$$S = \frac{a}{4} + \frac{b}{12} + \frac{c}{8} - \frac{3a}{2(x+3)} - \frac{a}{2(x+2)} - \frac{b}{2(x+2)(x+3)} - \frac{c}{3(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

64. — Sommer la suite :

$$S = \sum^n \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n}{x(x+1)(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+n+1)}$$

On met le terme général sous la forme :

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n}{x(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+n+1)} = \frac{A_1}{x(x+1)} + \frac{A_2}{(x+1)(x+2)} + \ldots\ldots + \frac{A^{n+1}}{(x+n)(x+n+1)}$$

Les indéterminées $A_1, A_2, \ldots\ldots A^{n+1}$ sont données par n équations du premier degré, obtenues en identifiant les deux membres. On aura ensuite :

$$S = \sum_1^x \frac{A_1}{x(x+1)} + \sum_1^n \frac{A_2}{(x+1)(x+2)} + \ldots + \sum_1^n \frac{A_{n+1}}{(x+n)(x+n+1)},$$

$$S = A_1 \sum_1^x \frac{1}{x(x+1)} + A_2 \sum_2^{x+1} \frac{1}{x(x+1)} + A_3 \sum_3^{x+2} \frac{1}{x(x+1)} + \ldots\ldots + A_{n+1} \sum_{n+1}^{x+n} \frac{1}{x(x+1)}.$$

Mais, d'une manière générale :

$$\sum_i^{x+i-1} = \frac{1}{i} - \frac{1}{x+i},$$

$$S = \sum_{i=1}^{i=n+1} \frac{Ai}{i} - \sum_{i=1}^{i=n+1} \frac{Ai}{x+i}.$$

Pour $x = \infty$, la seconde somme s'annule, et il reste

$$\lim. S = \frac{A_1}{1} + \frac{A_2}{2} + \frac{A_3}{3} + \ldots\ldots + \frac{A_{n+1}}{n+1}$$

65. — On considère la suite : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + \ldots$ et on la partage en groupes contenant le premier, un terme; le deuxième, deux; ..... le p^{me}, p. Trouver la somme des p termes du p^{me} groupe.

1° Cette somme est divisible par la somme des termes du groupe correspondant formé, de la même manière, dans la suite : $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots$ 2° quand p est impair, la somme considérée est divisible par p^3.

La somme considérée est la différence entre la somme des cubes des $\frac{p(p+1)}{2}$ premiers nombres entiers, et la somme des cubes des $\frac{p(p-1)}{2}$ premiers nombres entiers. On trouve

$$S = \frac{p^3}{8}(p^2+1)(p^2+3).$$

La somme des p termes du premier groupe est:

$$\frac{p}{2}(p^2+1).$$

66. — Rendre calculables, par logarithmes, les quantités :
1° $\cotg A + \cotg B + \cotg C - 2[\cotg 2A + \cotg 2B + \cotg 2C]$;
2° $(1 + \tg A \tg B \tg C)^2 - 4 \tg^2 A \tg^2 B \tg^2 C$.

La première expression équivaut à

$$\tg A \tg B \tg C;$$

la seconde, à

$$\frac{8 \tg A \tg B \tg C}{\tg 2A \tg 2B \tg 2C}.$$

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

— O et O′ sont deux sphères de rayons donnés, dont les centres sont situés sur la ligne de terre. Un point quelconque (a, a') étant donné dans l'espace, on propose de mener, par ce point, un plan tangent à la fois aux deux sphères O et O′.

(Paris, Baccalauréat de l'Enseignement spécial. Octobre 1887.)

— SAB est un cône circulaire droit dont la base a un rayon donné a, et dont la hauteur est égale à $4a$. Une sphère CD, dont le diamètre est égal à la hauteur du cône, est tangente au plan de base de ce cône, et située du même côté de ce plan que le cône lui-même. On demande de couper ces deux solides par un plan parallèle à la base du cône, de manière que le volume du tronc de cône EFBA soit équivalent à celui du segment de sphère CDH.

(Paris, Baccalauréat de l'Enseignement spécial. Octobre 1887.)

CHAMBÉRY (Juillet 1887.)

Mathématiques.

— Donner la valeur de $\sin \frac{77\pi}{6}$. Connaissant cette valeur, en déduire celle de $\sin \frac{77\pi}{12}$.

— On donne deux circonférences C et C′ mobiles dans un même plan. La circonférence C a pour rayon $\frac{91a}{80}$; son centre se déplace, d'un mouvement uniforme, de vitesse a, sur la droite donnée CX. La circonférence C a pour rayon $\frac{11a}{80}$. Son centre est animé de deux mouvements uniformes simultanés : le premier, de vitesse $9a$, parallèle à la droite CX, le second, de vitesse $6a$, perpendiculaire à CX. A l'origine des temps, la droite des centres CC′ est perpendiculaire à CX et égale à $\frac{3a}{4}$.

1° Calculer la distance C, C′ des centres des circonférences au bout du temps t; 2° indiquer, pour les différentes valeurs du temps t, les positions relatives des deux circonférences.

GRENOBLE (Session d'août 1887.)

Mathématiques.

— Somme des termes d'une progression géométrique limitée. Limite vers laquelle tend cette somme, lorsque, la progression étant décroissante, le nombre des termes augmente indéfiniment.

Étant donnée la progression :

$$\div\div a : aq : aq^2 : \ldots .$$

où $a = \sin x$ et $q = 2 \cos x$, on suppose :

$$o < x < 90°.$$

Déterminer pour quelles valeurs de x la progression est croissante ou décroissante. Dans le cas où elle est décroissante, trouver la limite de la somme des termes, lorsque leur nombre augmente indéfiniment. Calculer x sachant que cette limite est égale à $2\sqrt{2}$.

— Étant donné un hexagone régulier ABCDEF, de côté AB $= a$, on détache le triangle ABC formé par trois sommets consécutifs. Déterminer le centre de gravité de la surface pentagonale ACDEF. Soit G ce point ; on joint le point G aux sommets A, C, D, E, F. Les cinq droites ainsi obtenues représentent, en grandeur et position, cinq forces appliquées au point G. Trouver la résultante de ces forces.

NANCY (session de juillet 1887).

Mathématiques.

— Démontrer que la valeur du produit de plusieurs nombres est indépendante de l'ordre des facteurs de ce produit.

— Un cône droit est inscrit à une sphère de rayon R. Une arête de ce cône dans la sphère et dans le cône ait une valeur donnée πm^2? — Conditions de possibilité du problème.

MARSEILLE (Juillet 1887).

Mathématiques.

— Dans un triangle, on donne a, b, c. Trouver au moyen de formules calculables par logarithmes, les quantités

$$\sin A, \sin \frac{A}{2}, \cos \frac{A}{2}, \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Calculer l'angle A au moyen de la formule qui donne $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$, en supposant :

$$a = 53417,$$
$$b = 58622,$$
$$c = 50241.$$

— Construire l'angle de la ligne de terre avec une droite qui la rencontre et qui est définie par ses projections; et trouver les projections de la bissectrice de cet angle.

LYON (Juillet 1887.)

Première série.

Mathématiques.

— O est le centre d'un demi-cercle dont le diamètre AB est donné égal à 2R. Sur ce diamètre on prend un point C, à une distance du centre O égale à 3R Déterminer un point D tel que si l'on mène DE perpendiculaire sur AB, les volumes des solides engendrés par le triangle EDC et par le demi segment de cercle EDA tournant autour de AD, soient dans le rapport $\frac{119}{36}$. Calculer ensuite l'angle C, et les arcs AE et BF en degrés, minutes, secondes.

Deuxième série.

— Un parallélépipède a pour base un carré dont le côté est égal à 3,5; les arêtes latérales ont la même longueur que le côté du carré, et l'une d'elles se projette sur l'une des diagonales de la base. Le volume de ce solide est égal à $31^{mc}247$. Calculer : 1° l'angle que les arêtes latérales ont avec le plan de la base; 2° la surface latérale du parallélépipède; 3° les angles du parallélogramme qu'on obtient en coupant le parallélépipède par un plan perpendiculaire aux arêtes latérales.

QUESTION 221

Solution par M. Couvert, élève au Lycée Condorcet.

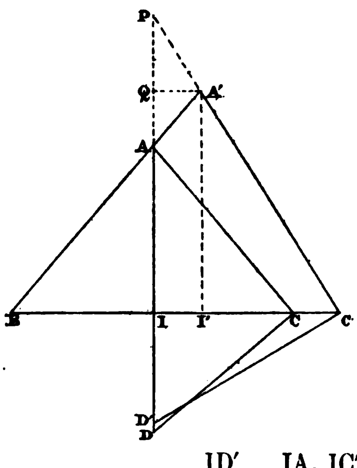
Dans le triangle ABC, *dont les côtés* AB, AC *sont égaux,* I *est le milieu de la base* BC. *Si l'on porte, sur le côté* BA, *la longueur* AA' = m. BA*; et, sur le côté* BC, *la longueur* CC' = p. BC*; si, de plus, les perpendiculaires respectivement élevées à* AC, A'C', *aux points* C, C', *coupent la droite* AI *aux points* D, D', *on a:*

$$\frac{ID'}{ID} = \frac{(1 + 2p)(1 + 2p - m)}{1 + m}.$$

Corollaire. — *Soit* I' *le pied de la perpendiculaire abaissée de* A' *sur* BC. *Si l'on prend* CC' = II', *la perpendiculaire élevée en* C', *à* A'C', *passe par le point* D.

(D'Ocagne.)

Prolongeons C'A' jusqu'à son intersection P, avec AI; puis abaissons A'Q perpendiculaire sur AI. Les triangles rectangles ACD, PC'D' donnent:



$$ID = \frac{\overline{IC}^2}{IA},\ ID' = \frac{\overline{IC'}^2}{IP};$$

par suite:

$$\frac{ID'}{ID} = \frac{IA \times \overline{IC'}^2}{IP \times \overline{IC}^2}.$$

Les triangles semblables PA'Q, PIC' donnent:

$$\frac{IP}{PQ} = \frac{IC'}{A'Q};$$

d'où:

$$\frac{IP}{IQ} = \frac{IC'}{IC' - A'Q},$$

$$IP = \frac{IQ.\ IC'}{IC' - A'Q};$$

il vient alors: $\dfrac{ID'}{ID} = \dfrac{IA.\ IC'(IC' - A'Q)}{\overline{IC}^2.\ IQ}.$

De la similitude des triangles AA'Q, ABI, on déduit:

$$\frac{AI}{AQ} = \frac{AB}{AA'},$$

ou

$$\frac{AI}{IQ} = \frac{AB}{AB + AA'} = \frac{1}{1+m}.$$

D'un autre côté, $\frac{A'Q}{BI} = \frac{AA'}{AB} = m;$

donc $A'Q = m.\,BI = m.\frac{BC}{2}, \; IC' = \frac{BC}{2} + p.\,BC.$

On a donc:

$$\frac{ID'}{ID} = \frac{1}{1+m} \times \frac{BC\left(\frac{1}{2}+p\right)\left[BC\left(\frac{1}{2}+p\right) - m\frac{BC}{2}\right]}{\frac{\overline{BC}^2}{4}}.$$

En simplifiant, on trouve

$$\frac{ID'}{ID} = \frac{(1+2p)(1+2p-m)}{1+m}.$$

Corollaire. — Supposons que l'on abaisse A'I' perpendiculaire sur BC, puis que l'on prenne $cc' = II' = A'Q$. Nous avons vu, plus haut, que $A'Q = m.\frac{BC}{2}$. Cela revient donc à prendre $p = \frac{m}{2}$. La formule devient:

$$\frac{ID'}{ID} = \frac{(1+m)(1+m-m)}{1+m},$$

ou $ID' = ID$. La perpendiculaire élevée en C' à A'C' rencontre donc AI en D.

NOTA. — Autres solutions par MM. René-Henri Martin, élève au lycée Condorcet (classe de M. Brisse); G. Russo, à Catanzaro; Ignacio Beyens, capitaine du génie à Cadix.

QUESTIONS PROPOSÉES

276. — On considère un triangle isoscèle ACB et, sur la base AB, on prend un point D tel que BD = AB. D'autre part, on élève en A, B des perpendiculaires aux côtés AC, BC; soit C' leur point de rencontre:

1° La perpendiculaire abaissée, de C′, sur CD, partage AB dans le rapport de 2 à 1;

2° La perpendiculaire élevée en C, à CD, coupant: AC′ en H; BC′, en K; on a CH = HK;

3° On demande la généralisation de ces remarques, en supposant que D désigne un point quelconque, pris sur AB;

4° D désignant un point quelconque de AB, démontrer que la perpendiculaire élevée en D, à C′D, est partagée, par les côtés CA, CB et par le point D, en deux parties égales.

(Mannheim.)

277.— Soient Δ et Δ′ deux droites parallèles, OO′ une perpendiculaire commune; par O, on trace une transversale qui rencontre Δ′ en A; puis l'on prend: sur OA, AD = AC = AO′ sur Δ′, AB = AO′. La droite BC rencontre OO′ en P et Δ en Q. De même, BD coupe OO′ en P′ et Δ en Q′.

Démontrer: 1° que la circonférence PO′Q est tangente à Δ, au point Q, et que la circonférence O′P′Q′ touche Δ en Q′; 2° que les circonférences PO′Q, P′O′Q′ se touchent mutuellement en O′.

(G. L.)

278. — Sur les côtés d'un triangle ABC on construit trois triangles semblables A′BC, B′CA, A′BC. Démontrer: 1° que les droites AA′, BB′, CC′ sont, en grandeur et en direction, les côtés d'un triangle T; 2° calculer l'aire de ce triangle et la somme $\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2$ en fonction des côtés de ABC et des angles de A′BC.

(J. Neuberg.)

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 4508-3-8.

GÉOMÉTRIE ET MÉCANIQUE

Par M. **Neuberg**, professeur à l'Université de Liège.

(*Suite*, v. p. 49).

5. — Considérons trois forces α, β, γ, dirigées suivant les côtés du triangle ABC et regardées comme positives ou négatives suivant qu'elles agissent dans le sens direct ABC ou dans le sens rétrograde CBA. Désignons par ρ leur résultante; par δ_a, δ_b, δ_c, les distances de A, B, C à la ligne d'action de ρ, par h_a, h_b, h_c les hauteurs de ABC.

Si nous prenons les moments de α, β, γ, ρ successivement par rapport à A, B, C, nous aurons

$$\alpha h_a = \rho\delta_a, \qquad \beta h_b = \rho\delta_b, \qquad \gamma h_c = \rho\delta_c,$$

d'où
$$\delta_a : \delta_b : \delta_c = \alpha h_a : \beta h_b : \gamma h_c = \frac{\alpha}{a} : \frac{\beta}{b} : \frac{\gamma}{c};$$

de plus :
$$\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta \cos C - 2\beta\gamma \cos A - 2\gamma\alpha \cos B.$$

6. — Le cas de $\alpha = \pm \beta = \pm \gamma$ offre un grand intérêt. Soient D , D_b, D_c, E_a, E_b E_c, les points de rencontre des côtés du triangle ABC avec les bissectrices intérieures et extérieures des angles; on peut énoncer le théorème suivant (*):

Si l'on applique, dans un sens ou dans l'autre, trois forces égales suivant les trois côtés d'un triangle ABC, *la résultante est dirigée suivant l'une des quatre droites* : $E_aE_bE_c$, D_bD_c, D_cD_a, D_aD_b.

Prolongeons AB et AC des quantités BP = CQ = BC, et prenons aussi sur BA, CA les longueurs BP′ = CQ′ = BC. La droite PQ, par exemple, sera la résultante des droites PB, BC, CQ; sa direction est donc celle de la résultante de trois forces égales dirigées suivant les côtés du triangle ABC. De là le théorème de géométrie élémentaire dont la démonstration directe constitue un exercice utile:

(*) Il suffit de construire la résultante de deux des forces égales, pour constater ce théorème.

Étant donné un triangle quelconque ABC, *les circonférences décrites des points* B *et* C *comme centres, avec le rayon* BC, *rencontrent, respectivement, les côtés* BA *et* CA *aux points* P *et* Q, P′ *et* Q′*: les droites* PQ, P′Q′ PQ′, P′Q *sont parallèles aux droites joignant les pieds des bissectrices extérieures du triangle ou ceux de deux bissectrices intérieures.*

Rapprochons ces résultats de ceux du § 3. Dans les deux cas, nous avons deux systèmes de trois forces égales, et celles de l'un des systèmes sont perpendiculaires à celles de l'autre. Donc leurs résultantes sont également rectangulaires. De là, ce théorème trop peu connu :

Les droites joignant les pieds des bissectrices extérieures d'un triangle ABC *ou ceux de deux bissectrices intérieures, sont respectivement perpendiculaires aux droites qui unissent le centre* O *du cercle circonscrit au centre de l'un des cercles tangents aux côtés* (*).

Voici, en passant, une autre application du principe que nous venons d'utiliser en dernier lieu. *Soient* S_a, S_b, S_c *les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés; les droites* S_bS_c *et* AS_a *sont égales et perpendiculaires.* En effet, AS_a est la résultante de AA_1 et A_1S_a ou de AB_1, AC_1, A_1S_a; S_bS_c est la résultante de S_bB_1, B_1C_1, C_1S_c, droites égales et perpendiculaires à AB_1, A_1S_a, AC_1.

7. — Revenons au cas général du § 5. Soit M le point dont les coordonnées normales par rapport au triangle ABC sont proportionnelles à α, β, γ, et soit M′ l'inverse de M. Les coordonnées normales α', β', γ' de M′ sont inversement proportionnelles à α, β, γ ; donc

$$\delta_a : \delta_b : \delta_c = \frac{1}{a\alpha'} : \frac{1}{b\beta'} : \frac{1}{c\gamma'} = \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z},$$

(x, y, z) étant les coordonnées barycentriques de M′. Il résulte

(*) Soient A′, B′, C′, les points de contact des côtés de ABC avec le cercle inscrit I. Il est facile de voir que les milieux des B′C′, C′A′, A′B′ ont pour polaires, par rapport au cercle I, les bissectrices extérieures de ABC; par conséquent E_a, E_b, E_c sont les pôles des médianes de A′B′C′. Donc *le centre de gravité de* A′B′C′ *est le pôle de la droite* E_c E_b, *par rapport au cercle* I.

de là que *la résultante de trois forces égales à* α, β, γ, *dirigées suivant les côtés d'un triangle* ABC, *agit suivant la droite harmoniquement associée au point* M′ *qui a pour coordonnées normales* $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$.

Le théorème qui fait l'objet de la question 241 (*J. M. E.*, 1887, p. 23) résulte immédiatement de la proposition précédente. En voici l'énoncé :

Soient M *et* M′ *deux points inverses par rapport au triangle* ABC. *La résultante de trois forces représentées par les perpendiculaires abaissées de* M′ *sur les côtés de* ABC *est perpendiculaire à la droite harmoniquement associée à* M.

8. — On sait que trois forces représentées par les côtés AB, BC, CA d'un triangle (ou dirigées suivant ces côtés, et d'intensités proportionnelles aux longueurs de ces côtés) se réduisent à un couple. Réciproquement, si trois forces se réduisent à un couple, leurs intensités sont proportionnelles aux côtés du triangle formé par leurs directions. Ces propositions résultent aussi des formules du § 5; car la relation $\delta_a = \delta_b = \delta_c$ ne convient qu'à la droite à l'infini.

Pour donner une application de la théorie des couples à la géométrie du triangle, soient A′BC, B′CA, C′AB trois triangles semblables construits sur les côtés du triangle ABC. Les droites BA′, CB′, AC′ sont proportionnelles à BC, CA, AB et se coupent aux sommets d'un triangle semblable à ABC. On peut donc les considérer comme représentant trois forces qui se réduisent à un couple. Ce couple et le couple représenté par AB, BC. CA se ramènent généralement à un couple unique. Mais il est facile de voir que les forces AB et BA′, BC et CA′, CA et AC′ ont, respectivement, des résultantes égales et parallèles aux droites AA′, BB′, CC′. Donc *les lignes* AA′, BB′, CC′ *sont, en grandeur et en direction, les côtés d'un certain triangle.*

Plus généralement, *soient* (A′BC, B′CA, C′AB), (A″BC, B″CA C″AB) *deux systèmes de triangles semblables; les droites* A′B″, B′C , C′A″ *sont, en grandeur et en direction, les côtés d'un certain triangle.*

9. — Pour terminer ces applications, considérons un système de n points A, B, ... L_2. Soient X leur centre de gravité, Y celui des points B_1, C_1 ... K_1 L. On sait que X divise la droite YA dans le rapport $1 : n - 1$; par suite, si l'on remplace A par le point A', le centre de gravité X éprouve un déplacement XX_a parallèle à AA' et égal à $\frac{1}{n}$ AA'. Il résulte de là que si X et X' sont les centres de gravité de deux systèmes de n points (A, B, ... L), (A', B', ... L'), la droite XX' est le côté qui ferme la ligne polygonale ayant ses côtés parallèles aux droites AA', BB', ... LL' et égaux à la n^e partie de ces droites En particulier, X' coïncide avec X, lorsque les lignes AA', BB ... LL' sont égales et parallèles aux côtés d'un polygone fermé. Tel est le cas lorsque les triangles A'AB, B'BC, ... L'LA sont semblables (*) ; car A'A, B'B, ... L'L, sont proportionnelles à AB, BC, ... LA, et leur deviennent parallèles, après que le polygone AB ... L, a tourné de l'angle BAA' autour d'un point quelconque de son plan. De même, si, sur les hauteurs d'un triangle ABC, on prend des longueurs AA', BB', CC' proportionnelles aux côtés opposés, les triangles A'B'C', ABC ont même centre de gravité.

UN CHAPITRE D'ARITHMÉTIQUE

NOMBRES INCOMMENSURABLES
LIMITES — MESURE DES GRANDEURS — RAPPORTS

Par M. **J. Griess,** professeur du cours préparatoire à Saint-Cyr, au Lycée d'Alger.

INTRODUCTION

Dans la plupart des traités élémentaires qui parlent de la théorie des nombres incommensurables et des limites, on procède à la définition de ces nombres de la manière suivante :

1° On définit la limite d'un nombre variable x un nombre

(*) *Théorème* de M. Laisant.

fixe a, tel que la différence $a - x$ finisse par devenir et rester en valeur absolue plus petite qu'une grandeur donnée, si petite qu'elle soit.

Comme à ce moment on n'a pas encore parlé de nombres incommensurables, ce nombre fixe est de toute nécessité un nombre entier ou fractionnaire, un nombre rationnel.

2° On admet comme évidente cette proposition : Quand un nombre variable constamment croissant est assujetti à rester moindre qu'un nombre fixe, il tend vers une limite inférieure ou égale à ce nombre.

D'après la définition donnée, cela voudrait dire qu'il existe un nombre entier ou fractionnaire dont la différence avec le nombre variable tend vers zéro; dans la grande majorité des cas, cette proposition serait donc fausse (*).

(*) Comme je l'ai dit à M. Griess, en lui accusant réception de la lettre qui renfermait le manuscrit du présent article, je ne partage pas les opinions qu'il expose ici et je crois, notamment, qu'en se refusant l'usage de l'axiome fondamental de l'analyse on complique, sans profit, l'exposition de la définition des nombres incommensurables. M. Griess croit-il qu'un débutant (je dis, *un débutant*, car la question actuelle n'a qu'un intérêt pédagogique) comprendra mieux la notion des suites convergentes et de leurs limites, donnée plus loin (§§ 2 et 3), que l'énoncé si simple et si fécond de l'axiome qu'il critique? J'ajouterai que cet axiome n'est pas appliqué, à propos de la définition des nombres incommensurables, comme le dit ici M. Griess. Si l'on veut définir $\sqrt{2}$, par exemple; on prend deux suites (*)

(A) $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_p, \ldots$

(B) $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_p, \ldots$

les nombres de (A) vont toujours en croissant, et leurs carrés sont plus petits que 2; ceux de (B) vont toujours en décroissant, et leurs carrés sont supérieurs à 2; de plus, la différence $\sigma_p - \rho_p$ tend vers zéro, quand p croît indéfiniment On admet alors, par application de l'axiome fondamental que (A) et (B) ont une limite; d'ailleurs cette limite est la même; et l'on arrive ainsi à une conception, qui me semble aussi nette que possible, de la racine carrée de 2. Il n'est nullement question dans tout cela de faire la différence entre une quantité non définie et un nombre rationnel; toutes les opérations signalées s'effectuent avec des nombres commensurables; elles conduisent à la notion des nombres incommensurables et, je persiste à le croire, par une voie simple, tout aussi rigoureuse que celles qu'on a proposées pour éviter l'emploi de l'axiome fondamental. G. L.

(*) Voyez : *Cours de Mathématiques spéciales*, t. I, p. 113. — Je crois que, à l'endroit cité, je n'ai fait que reproduire les idées généralement professées sur le point en question et que M. Catalan a eu le mérite, le premier, d'introduire dans l'enseignement. Laguerre, esprit très droit, et qui poussait fort loin le scrupule des choses rigoureuses avait soulevé, aux examens de l'École Polytechnique, la définition des nombres incommensurables; mais, si je ne me trompe, celle que je rappelle ici est, dans le fond, comme dans la forme, celle qui lui donnait satisfaction.

3° On se sert de cette proposition pour montrer que certaines suites de valeurs ont une limite, et on dit : Si cette limite n'est pas un nombre rationnel, nous dirons que c'est un nombre incommensurable.

Il est clair que cette façon de procéder constitue un cercle vicieux. Cette faute de logique, relevée depuis longtemps, a conduit les mathématiciens à chercher une nouvelle définition des nombres incommensurables, qui fut indépendante de l'idée de limite. M. Dedekind (*), M. Cantor (**), M. Tannery (***), en ont proposé plusieurs. Celle qui a été adoptée dans la suite de ce travail (****) repose sur la définition d'une suite convergente ; elle a l'avantage de pouvoir y rattacher facilement la théorie des séries.

DÉFINITIONS

1. — On appelle limite d'un nombre variable x, un nombre fixe a (entier ou fractionnaire et par conséquent numériquement assignable) tel que la différence $a - x$ finisse par devenir et rester inférieure à un nombre ε donné à l'avance, si petit qu'il soit.

2. — On appelle suite convergente une suite indéfinie de nombres rationnels (entiers ou fractionnaires)

(1) $$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n\ \ldots$$

jouissant de la propriété suivante :

Étant donné un nombre ε, aussi petit que l'on voudra, on peut toujours trouver un nombre n assez grand, pour que la différence

$$a_{n+p} - a_n$$

soit en valeur absolue inférieure à ε, quel que soit p.

Il en résulte qu'à partir de ce rang les termes de la suite sont compris entre $a_n - \varepsilon$ et $a_n + \varepsilon$. On peut donc toujours

(*) Dedekind : *Stetigkeit und irrationnale Zahlen*, 1872.

(**) Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, 1883.

(***) Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'un variable*, 1886.

(****) Tannery, chap. I, § 19 et suivants. Cantor, p. 23.

assigner un nombre α auquel ils sont inférieurs, un nombre β auquel ils sont supérieurs.

3. — Deux cas peuvent se présenter.

Ou bien les termes de la suite (1) admettent pour limite un nombre rationnel M; nous dirons alors que la suite (1) définit le nombre M; en particulier, si tous ses termes étaient égaux à a, elle définirait le nombre a.

Ou bien, il n'existe aucun nombre rationnel M tel que, pour n suffisamment grand, on ait

$$\text{val. abs. } (M - a_n) < \varepsilon.$$

Nous dirons alors que les termes de la suite (1) définissent un certain nombre A, que nous appellerons *incommensurable* ou *irrationnel.*

Si les termes de la suite (1) finissent par devenir et rester positifs, quand n croît indéfiniment, on dit que A est positif.

Si les termes de la suite (1) finissent par devenir et rester négatifs, quand n croît indéfiniment, on dit que A est négatif.

Il faut bien remarquer que cette définition donne simplement l'*existence* au nombre A; elle ne lui donne encore aucune propriété; en particulier, elle ne le considère nullement comme la limite des termes de la suite (1); car cela reviendrait à dire que, pour n suffisamment grand, on a

$$\text{val. abs. } (A - a_n) < \varepsilon,$$

inégalité qui n'a aucun sens pour le moment, puisqu'on ne sait seulement pas opérer sur A.

Pour compléter la définition des nombres tels que A, nous allons les douer de propriétés, en définissant sur eux les opérations élémentaires.

DÉFINITION DES OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

4. *Addition.* — Soient les deux nombres

A défini par (1) $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$

B défini par (2) $b_1, b_2, \ldots b_n \ldots$

La suite

(3) $a_1 + b_1 \quad a_2 + b_2, \;\ldots a_n + b_n \ldots$

est convergente. Pour le faire voir, il suffit de montrer que l'on

peut choisir n assez grand, pour que

$$\text{val. abs. } [(a_{n+p} + b_{n+p}) - (a_n + b_n)] < \varepsilon,$$

quel que soit p.

Pour cela il suffit de choisir n, de telle sorte que l'on ait à la fois

$$\text{val. abs. } (a_{n+p} - a_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{val. abs. } (b_{n+p} - b_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

quel que soit p; ce qui est possible, puisque, par hypothèse, les suites (1) et (2) sont convergentes.

A la suite (3) correspond un nombre qui, par définition, est A + B.

5. *Soustraction.* — Soient les deux nombres

A défini par (1) $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$

B défini par (2) $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$

On montrera, comme précédemment, que la suite

(4) $a_1 - b_1, \quad a_2 - b_2, \ldots a_n - b_n, \ldots$

est convergente; elle définit donc un nombre qui, par définition, est

$$A - B.$$

6. *Conséquences.* — Si les termes de la suite (4) tendent vers o, A — B est nul; on dit que

$$A = B.$$

Si les termes de la suite (4) finissent par devenir et rester positifs, A — B est positif; on dit que

$$A > B.$$

Si les termes de la suite (4) finissent par devenir et rester négatifs, A — B est négatif; on dit que

$$A < B.$$

7. *Multiplication.* — Soient les deux nombres

défini par (1) $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$

B défini par (2) $b_1, b_2, \ldots b_n \ldots$

La suite

(5) $a_1 b_1, \quad a_2 b_2, \ldots a_n b_n, \ldots$

est convergente. En effet, par hypothèse, on peut choisir n assez grand pour que chacune des différences

$$a_{n+p} - a_n, \qquad b_{n+p} - b_n,$$

soit en valeur absolue aussi petite que l'on veut; et cela quel que soit p; dans ces conditions on pourra faire en sorte que les rapports

$$\frac{a_{n+p}}{a_n}, \qquad \frac{b_{n+p}}{b_n},$$

soient, en valeur absolue, aussi voisins de 1 qu'on le voudra. On pourra donc choisir n de façon qu'il en soit de même du produit

$$\frac{a_{n+p}}{a_n} \times \frac{b_{n+p}}{b_n},$$

et que l'on ait

$$\text{val. abs.} \left[\frac{a_{n+p} . b_{n+p}}{a_n b_n} - 1\right] < \frac{\varepsilon}{\text{val. abs. } a_n b_n}$$

ou que $$\text{val. ab.} \left[a_{n+p} . b_{n+p} - a_n b_n\right] < \varepsilon.$$

La suite (5) est donc convergente, et il lui correspond un nombre qui, par définition, est

$$A \times B.$$

8. *Division.* — Soient les deux nombres A et B définis par les suites (1) et (2).

B n'est pas nul par hypothèse, de sorte que, n croissant indéfiniment, b_n reste supérieur en valeur absolue, à un certain nombre β.

Considérons la suite

$$(6) \qquad \frac{a_1}{b_2}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots \frac{a_n}{b_n} \ldots$$

Elle est convergente. Pour le montrer, il faut faire voir que l'on peut choisir n assez grand pour que la différence.

$$\frac{a_{n+p}}{b_{n+p}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+p} b_n - a_n b_{n+p}}{b_{n+p} . b_n}$$

soit, en valeur absolue, inférieure à tout nombre donné ε, si petit qu'il soit.

Par hypothèse, n croissant, le dénominateur finit par devenir supérieur en valeur absolue à β^2.

Le numérateur s'écrit

$$a_{n+p}b_n - a_nb_{n+p} = (a_{n+p} - a_n)(b_{n+p} + b_n) - (a_{n+p}b_{n+p} - a_nb_n)$$

Nous avons vu (multiplication) que par un choix convenable de n, le deuxième terme peut être rendu aussi petit que l'on veut. La suite (2) étant convergente, il existe un nombre β' auquel b_n et b_{n+p} finissent par rester inférieurs; $b_{n+p} + b_n$ reste donc inférieur en valeur absolue à $2\beta'$. La suite (1) étant convergente, $a_{n+p} - a_n$ peut être rendu, par un choix convenable de n, inférieur à toute grandeur donnée; il en sera donc de même du produit

$$(a_{n+p} - a_n)\,(b_{n+p} + b_n),$$

et par conséquent de la différence

$$a_{n+p}b_n - a_nb_{n+p},$$

Ainsi, en choisissant n de sorte que

$$\text{val. abs. } (a_{n+p}b_n - a_nb_{n+p}) < \varepsilon \times \text{val. abs. } b_nb_{n+p}$$

on a

$$\text{val. abs. } \left(\frac{a_{n+p}}{b_{n+p}} - \frac{a_n}{b_n}\right) < \varepsilon.$$

Donc la suite (b) est convergente; le nombre qui lui correspond est, par définition, $\frac{A}{B}$.

9. Théorème. — Le quotient $\frac{A}{B}$ est égal au quotient $\frac{A \times C}{B \times C}$. Soient les deux nombres A et B définis par les suites (1) et (2), et c un nombre défini par la suite convergente

(7) $$c_1, c_2, \dots c_n \dots$$

Les nombres A $\times$ C et B $\times$ C sont définis par les suites

(8) $$a_1c_1, \quad a_2c_2 \dots a_nc_n \dots$$

(9) $$b_1c_1, \quad b_2c_2 \dots b_nc_n \dots;$$

leur quotient, par la suite

(10) $$\frac{a_1c_1}{b_1c_1}, \frac{a_2c_2}{b_2c_2} \dots \frac{a_nc_n}{b_nc_n} \dots$$

ou

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \dots \frac{a_n}{b_n} \dots$$

il est donc égal à $\frac{A}{B}$.

(A suivre.)

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 58.)

68. Viser le milieu d'un segment inaccessible. — On suppose qu'un point invisible ω soit situé au milieu de la droite qui joint deux points visibles et inaccessibles O, O'; on peut alors se proposer d'établir la ligne de visée qui va d'un point donné M, au point ω; on peut aussi demander d'évaluer la distance $M\omega$.

Nous ferons observer que ce problème peut se présenter dans la guerre des sièges, pour les motifs suivants. On peut savoir, par exemple, que, dans une ville ssi égée, un certain point présentant un intérêt particulier (une caserne, une poudrière, etc.), point invisible pour les assiégeants, se trouve sur la droite qui joint deux monuments visibles et à égale distance de ceux-ci. Alors se pose le problème que nous venons de soulever et sur lequel nous aurons à revenir d'ailleurs, dans un prochain chapitre.

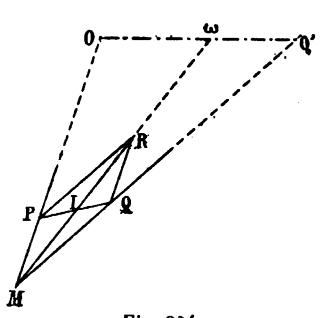


Fig. 221.

Nous nous bornons, pour l'instant, à noter que, parmi les solutions qu'il comporte, il y en a une, au moins, qui est la conséquence immédiate des résultats obtenus plus haut.

Menons PQ parallèle à OO', puis construisons le parallélogramme MPQR : MR est la ligne de visée.

Quant à la distance Mω, elle peut se calculer par la formule

$$M\omega = MI.\frac{MO}{MP}.$$

Il faudra relever, avec la chaîne, les longueurs MP, MI et connaître la distance MO, ou la calculer, comme il a été expliqué au chapitre précédent.

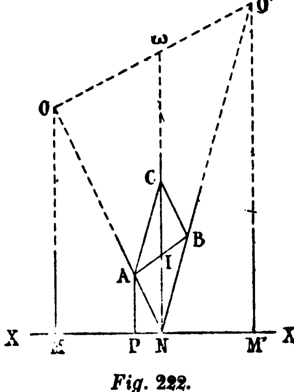


Fig. 222.

Autrement. On peut encore résoudre le problème précédent comme nous allons l'indiquer; cette nouvelle solution est même plus simple.

Traçons, dans la partie accessible, un alignement XX', et déterminons, avec l'équerre ordinaire, les projections M, M' des points O, O' sur XX': soit N le milieu de MM'. La ligne de visée, pour une batterie placée en N, sera la droite NC, perpendiculaire à XX'.

Il reste à déterminer la distance Nω. A cet effet, traçons les lignes de visée NO, NO' et, par C, menons-leur les parallèles CA, CB. La droite AB est parallèle à OO'. Nous avons donc

$$\frac{N\omega}{NI} = \frac{NO}{NA} = \frac{NM}{NP},$$

d'où

$$N\omega = NI\cdot\frac{NM}{NP}.$$

Cette formule donnera la longueur de la ligne de visée, sans qu'il soit nécessaire de connaître autre chose que les longueurs des lignes accessibles NI, NM, NP, qui sont données par un chaînage des plus simples, si la distance OO', comme nous l'avons supposé, n'est pas très grande, ou si, tout au moins, sa projection sur XX' est suffisamment petite. Nous ne parlons pas, bien entendu, des autres longueurs NI, NP, car celles-ci peuvent être choisies aussi courtes que l'on voudra.

Remarque I. — Si l'on veut établir le point de visée, non pas en N, mais en un autre point M, de XX'; on doit continuer la construction, comme il suit.

Ayant jalonné PI, on tracera, par M, une parallèle à cette droite; on obtiendra ainsi la ligne de visée. Quant à la distance Mω elle se calcule par la formule

$$M\omega = PI \cdot \frac{MN}{NP};$$

Mais, en général, du moins dans une certaine étendue de terrain, la position du centre de la batterie importe peu; on choisit donc l'alignement fondamental XX' de façon que le point N soit dans la région favorable à l'établissement de cette batterie.

Remarque II. — Les solutions précédentes réclament l'emploi de l'équerre ou celui de la fausse équerre; une autre construction, celle-ci n'exigeant que des alignements et un cordeau, repose sur la propriété des points milieux des diagonales d'un quadrilatère complet; nous l'indiquerons dans un chapitre suivant, quand nous traiterons de certains problèmes d'artillerie. A ce moment, nous reviendrons sur la question présente, pour l'examiner dans toute sa généralité. Nous déterminerons alors une ligne de visée aboutissant à un point invisible, connaissant les distances de celui-ci à deux points visibles.

69. La distance à une droite inaccessible. — 1° *La solution directe.* Représentons toujours par A, B les deux points inaccessibles considérés; et proposons nous d'évaluer la distance d'un point O, pris dans la région accessible, à la droite AB.

Bien entendu, on ne suppose pas que le prolongement de AB pénètre dans la partie accessible.

Dans celle-ci, traçons une droite Δ; soient A', B' les projections de A, B sur Δ. Les angles AB'C, BA'D étant droits, traçons CD qui rencontre A'B' en J. Nous avons

$$BB' = \frac{\overline{A'B'}^2}{B'D}, \qquad AA' = \frac{\overline{A'B'}}{A'C};$$

par suite,

$$BB' - AA' = BK = \overline{A'B'}^2\left(\frac{1}{B'D} - \frac{1}{A'C}\right).$$

D'autre part, le trapèze CA'JL donne (*Première partie*, § 14)

$$\frac{1}{B'D} = \frac{1}{A'C} + \frac{1}{JL} = \frac{1}{A'C} + \frac{1}{B'R}.$$

D'après cela, nous avons donc

$$BK \, . \, B'R = \overline{A'B'}^2.$$

Cette égalité prouve que les triangles ABK, A'B'R sont semblables. Ainsi A'R est perpendiculaire sur AB. Incidemment, on voit que nous trouvons ici une solution du problème, envisagé d'ailleurs à la fin de ce chapitre, qui consiste à *abaisser une perpendiculaire sur une droite inaccessible*, Ce problème ne présente guère d'intérêt particulier; en effet, si l'on sait tracer des parallèles à une droite AB (et nous avons résolu ce problème de plusieurs façons, dans les paragraphes précédents) on détermine, par cela même, au moyen de l'équerre, des perpendiculaires à cette direction.

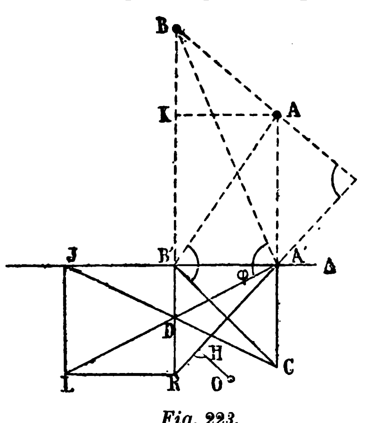


Fig. 223.

Mais l'évaluation de la distance du point donné O à la droite inaccessible est au contraire un problème que nous n'avons pas encore abordé; on peut le résoudre comme nous allons l'indiquer.

Considérons les triangles semblables AA'S, A'B'R; nous avons

$$\frac{A'S}{A'A} = \frac{B'R}{A'R}.$$

Mais
$$A'A = \frac{\overline{A'B'}^2}{A'C};$$

donc
$$A'S = \frac{\overline{A'B'}^2 \, . \, B'R}{A'R \, . \, A'C}.$$

On calcule A'S : la distance inconnue est égale à A'S + A'H.

2° *La solution par le quadrilatère.* — Lorsqu'on a déterminé,

par une méthode quelconque, la direction de la perpendiculaire OS abaissée, du point donné O, sur la droite AB, on peut calculer OS en utilisant la propriété classique des diagonales du quadrilatère.

Ayant pris un point arbitraire M sur la partie accessible de OS, on a

$$\frac{1}{OS} = \frac{2}{OM} - \frac{1}{OR}.$$

Cette formule est assez commode, quand on fait usage de la table des inverses.

Fig. 224.

Cette solution, et une autre (*), beaucoup plus compliquée, ont été indiquées par Servois (*loc. cit*; p. 66)

3° *La solution par la Table des inverses.* — Nous indiquerons, en dernier lieu, une méthode particulièrement simple, surtout quand on fait usage d'une table des inverses.

Soit Δ la droite inaccessible; par le point donné O, jalonnons une droite Δ′ parallèle à Δ. On observe, sur Δ, un point visible B; soit P la projection de B sur A. Ayant effectué les jalonnements qu'indique la figure, on a (*Première partie*, § 14).

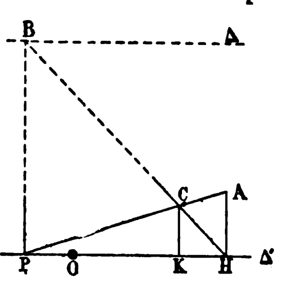


Fig. 223.

$$\frac{1}{BP} = \frac{1}{CK} - \frac{1}{AH}.$$

(*) Cette seconde solution repose sur l'égalité bien connue

$$\frac{ah}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Pour déterminer l'inconnue h, il faudrait, par ce procédé, calculer les trois côtés du triangle OAB ; en particulier, AB, problème plus compliqué certainement que celui qu'on propose. Servois, après l'avoir exposée, ajoute : « Cette solution est conforme, pour la marche, à ce qu'on présente communément ». Pour la marche, la solution en question ne soulève en effet aucune objection ; elle est, au point de vue théorique, irréprochable. Mais s'il s'agit, comme dans l'espèce, d'une solution pratique, il faut avouer qu'elle est aussi mauvaise que possible ; c'est d'ailleurs l'opinion de Servois lui-même.

Les longueurs CK, AH peuvent être choisies aussi petites que l'on voudra et dans le voisinage même du point O, si la région accessible se trouve très limitée ; c'est donc bien là, dans le sens que nous donnons à ce mot, dans cet ouvrage, une solution générale.

70. La perpendiculaire à la droite inaccessible. — Si l'on sait tracer, dans la région accessible, une parallèle à une droite inaccessible AB, on sait, par cela même lui mener des perpendiculaires, et vice versâ. On peut donc ramener le problème actuel à celui qui a été traité plus haut, et qui permet de mener, par un point, une parallèle accessible à une droite inaccessible. Il n'est pourtant pas sans intérêt de le résoudre directement.

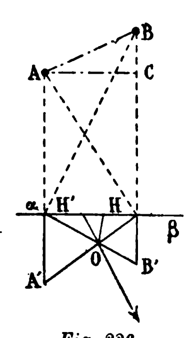


Fig. 226.

Soient α, β les projections de AB sur une droite Δ, tracée dans la partie accessible. Ayant déterminé, comme l'indique la figure, les points A', B' (*) en construisant les angles droits AβA', BαB', on a

$$A\alpha = \frac{\overline{\alpha\beta}^2}{A'\alpha}, \quad B\beta = \frac{\overline{\alpha\beta}^2}{B'\beta}.$$

Par suite, $$B\beta - A\alpha = BC = \overline{\alpha\beta}^2\left(\frac{1}{B'\beta} - \frac{1}{A'\alpha}\right).$$

Abaissons, sur αβ, la perpendiculaire OH; les triangles semblables βOH, A'αβ, d'une part; αOH, αB'β, d'autre part, donnent les valeurs de B'β, A'α; et l'on a

$$(1) \qquad BC = \frac{\alpha\beta}{OH}(\alpha H - \beta H).$$

Soit H' l'isotomique de H, sur αβ. On a

$$HH' = \alpha H - \beta H,$$

et l'égalité (1) devient

$$\frac{BC}{AC} = \frac{HH'}{OH}.$$

(*) Suivant une expression que nous proposons dans le chapitre suivant A', B' sont les *réciproques* de A, B.

D'après cela, les triangles rectangles ABC, OHH' sont semblables, et la droite OH' est perpendiculaire sur AB.

En résumé, ayant déterminé le point O par les perpendiculaires aux lignes de visée αB, βA, on projette O, en H, sur $\alpha\beta$, et l'on prend l'isotomique de H par rapport à $\alpha\beta$ ($\alpha H' = H\beta$) : la droite OH', ainsi obtenue est perpendiculaire sur AB.

La distance inaccessible AB se détermine bien facilement si l'on observe que

$$AB = \frac{OH'}{OH} \cdot \alpha\beta.$$

Cette détermination de la longueur de la droite inaccessible, problème que nous allons développer dans le chapitre suivant, est suffisamment simple dans la pratique, lorsqu'il s'agit d'évaluer un segment très éloigné, si l'on peut tracer, dans la région accessible, deux parallèles aboutissant aux extrémités du segment. On remarquera, en effet, que la hauteur OH est d'autant plus petite que les points A et B sont plus éloignés; la construction précédente pourra donc, dans ce cas, être effectuée, sans nécessiter l'emploi d'une grande étendue de terrain.

(A suivre.)

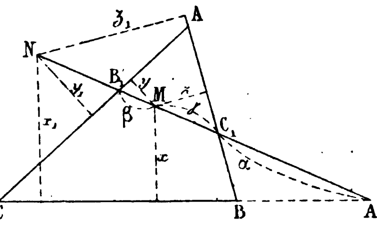
LES ÉQUATIONS DES POINTS REMARQUABLES

UNE PROPRIÉTÉ NOUVELLE DE LA TRANSVERSALE DU TRIANGLE

Par M. **H. Plamenewsky**, maître à l'École réale de Temir-Khan-Choura

---

1. — Dans sa très intéressante étude « *Géométrie du triangle* » M. E. Vigarié fait le rappel de l'ensemble des propriétés des points remarquables du triangle; il donne, pour chacun de ces points, les coordonnées normales ou barycentriques. Mais pour tout point du triangle il existe une équation caractéristique, de laquelle résultent



toutes les propriétés de ce point. Cest la transversale mobile passant par ce point qui donne cette équation.

Considérons, en effet, la droite Δ qui, passant par le point donné M, coupe les côtés du triangle ABC aux points A_1, B_1, C_1. Soient x, y, z, les coordonnées normales du point M, et x_1, y_1, z_1, celles d'un point quelconque N de cette droite Δ. Nous avons :

$x_1 : x = A_1N : A_1M$; $y_1 : y = B_1N : B_1M$; $Z_1 : Z = C_1N : C_1M$;

d'où, en posant $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$:

$$ax_1 = \frac{A_1N}{A_1M}ax, \qquad by_1 = \frac{B_1N}{B_1M}by, \qquad cz_1 = \frac{C_1N}{C_1M}cz.$$

D'autre part, nous avons les coordonnées étant prises en valeur absolue,

$$ax_1 + cz_1 - by_1 = 2S, \qquad ax + by + cz = 2S.$$

Par suite, nous trouvons

$$\left(\frac{A_1N}{A_1M} - 1\right)ax - \left(\frac{B_1N}{B_1M} + 1\right)by + \left(\frac{NC_1}{C_1M} - 1\right)cz = 0.$$

Mais

$$A_1N - A_1M = MN,\ B_1N + MB_1 = MN,\ NC_1 - C_1M = MN,$$

l'égalité précédente devient donc

$$\frac{ax}{MA_1} + \frac{by}{MB_1} + \frac{cz}{MC_1} = 0.$$

En posant, pour abréger,

$$MA_1 = u, \qquad MB_1 = v, \qquad MC_1 = w.$$

et en désignant par α, β, γ, les coordonnées barycentriques de M, l'équation précédente prend la forme

(A) (*) $$\frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} + \frac{\gamma}{w} = 0.$$

Dans cette relation, α, β, γ; u, v, w ont, bien entendu, des signes convenables ; ceux de α, β, γ sont déterminés par la règle connue ; u, v, w sout positifs ou négatifs, suivant que les longueurs MA_1, MB_1, MC_1 sont comptées dans le sens positif ou dans le sens négatif, sur la transversale considérée : avec ces conventions, la formule trouvée est générale.

Remarque. — Si le point M se trouve sur le côté BC nous

(*) Cette relation est remarquable ; elle donnera lieu sans doute à des applications diverses. G. L.

avons $\frac{ax}{MA_1} = \frac{0}{0}$; mais en général, pour toute position du point M, $\frac{x}{MA_1} = \sin\varphi_1$, φ_1 étant l'angle de la transversale avec le côté du triangle BC. Par suite, dans ce cas particulier, l'équation du point est

$$a \sin\varphi_1 + \frac{\beta}{v} + \frac{\gamma}{w} = 0.$$

2. — La relation (A), qui est fondamentale, permet de trouver l'équation d'un point, connaissant ses coordonnées barycentriques (ou normales). En se reportant aux valeurs connues qui donnent ces coordonnées, on peut former le tableau suivant représentant, dans le système de coordonnées tangentielles que nous venons de définir, les équations de quelques points remarquables.

$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0 \ldots$ Centre de gravité

$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w} = 0 \ldots$ Centre du cercle inscrit

$-\frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w} = 0 \ldots$
$\frac{a}{u} - \frac{b}{v} + \frac{c}{w} = 0 \ldots$ Centres des cercles ex-inscrits
$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} - \frac{c}{w} = 0 \ldots$

$\frac{a^2}{u} + \frac{b^2}{v} + \frac{c^2}{w} = 0 \ldots$ Point de Lemoine

$\sum \frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2)}{u} = 0 \ldots$ Centre du cercle circonscrit

$\sum \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} \cdot \frac{1}{u} = 0 \ldots$ Orthocentre

$\sum \frac{b + c - a}{u} = 0 \ldots$ Point de Nagel

$$\sum \frac{1}{b+c-a} \cdot \frac{1}{u} = 0 \ldots \quad \text{Point de Gergonne}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a^2b^2}{u} + \dfrac{b^2c^2}{v} + \dfrac{c^2a^2}{w} = 0 \;.. \\ \dfrac{a^2c^2}{u} + \dfrac{b^2c^2}{v} + \dfrac{c^2b^2}{w} = 0 \ldots \end{array}\right\} \text{Points de Brocard.}$$

etc. ...

On observera encore que, étant donnée l'équation d'un point M, dans le système tangentiel proposé :

$$\frac{A}{u} + \frac{B}{v} + \frac{C}{w} = 0,$$

on déterminera facilement la position de M, dans le plan du triangle de référence, puisque A, B, C sont proportionnels aux coordonnées barycentriques de M.

(A suivre.)

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

ENTRE LES TROIS ANGLES D'UN TRIANGLE

Par M. l'abbé **E. Gelin,**
Professeur au Collège Saint-Quirin, à Huy (Belgique).

On a, entre les trois angles A, B, C d'un triangle rectiligne, la relation

$$A + B + C = \pi.$$

On déduit, de cette relation, un grand nombre de formules, parmi lesquelles nous signalons les cent-six formules suivantes, dont quelques-unes sont nouvelles :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C, \\ \sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C, \\ \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C, \\ \cos A + \cos B - \cos C = -1 + 4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C; \end{array}\right.$$

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&\sin^2\frac{1}{2}A+\sin^2\frac{1}{2}B+\sin^2\frac{1}{2}C=1-2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C,\\
&\sin^2\frac{1}{2}A+\sin^2\frac{1}{2}B-\sin^2\frac{1}{2}C=1-2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C,\\
&\cos^2\frac{1}{2}A+\cos^2\frac{1}{2}B+\cos^2\frac{1}{2}C=2+2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C,\\
&\cos^2\frac{1}{2}A+\cos^2\frac{1}{2}B-\cos^2\frac{1}{2}C=2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C;
\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C,\\
&\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C=4\cos A\cos B\sin C,\\
&\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C,\\
&\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C=1-4\sin A\sin B\cos C;
\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
&\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C,\\
&\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=2\sin A\sin B\cos C,\\
&\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C,\\
&\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=1-2\sin A\sin B\cos C;
\end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
&\sin\frac{1}{2}A+\sin\frac{1}{2}B+\sin\frac{1}{2}C\\
&=1+4\sin\frac{1}{4}(\pi-A)\sin\frac{1}{4}(\pi-B)\sin\frac{1}{4}(\pi-C),\\
&\sin\frac{1}{2}A+\sin\frac{1}{2}B-\sin\frac{1}{2}C\\
&=-1+4\cos\frac{1}{4}(\pi-A)\cos\frac{1}{4}(\pi-B)\sin\frac{1}{4}(\pi-C),\\
&\cos\frac{1}{2}A+\cos\frac{1}{2}B+\cos\frac{1}{2}C\\
&=4\cos\frac{1}{4}(\pi-A)\cos\frac{1}{4}(\pi-B)\cos\frac{1}{4}(\pi-C),\\
&\cos\frac{1}{2}A+\cos\frac{1}{2}B-\cos\frac{1}{2}C\\
&=4\sin\frac{1}{4}(\pi-A)\sin\frac{1}{4}(\pi-B)\cos\frac{1}{4}(\pi-C);
\end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad\begin{cases}
\sin^2\frac{1}{4}A+\sin^2\frac{1}{4}B+\sin^2\frac{1}{4}C\\
=\frac{3}{2}-2\cos\frac{1}{4}(\pi-A)\cos\frac{1}{4}(\pi-B)\cos\frac{1}{4}(\pi-C),\\
\sin^2\frac{1}{4}A+\sin^2\frac{1}{4}B-\sin^2\frac{1}{4}C\\
=\frac{1}{2}-2\sin\frac{1}{4}(\pi-A)\sin\frac{1}{4}(\pi-B)\cos\frac{1}{4}(\pi-C),\\
\cos^2\frac{1}{4}A+\cos^2\frac{1}{4}B+\cos^2\frac{1}{4}C\\
=\frac{3}{2}+2\cos\frac{1}{4}(\pi-A)\cos\frac{1}{4}(\pi-B)\cos\frac{1}{4}(\pi-C),\\
\cos^2\frac{1}{4}A+\cos^2\frac{1}{4}B-\cos^2\frac{1}{4}C\\
=\frac{1}{2}+2\sin\frac{1}{4}(\pi-A)\sin\frac{1}{4}(\pi-B)\cos\frac{1}{4}(\pi-C);
\end{cases}$$

$$(7)\quad \sin kA+\sin kB+\sin kC$$

$$=\begin{bmatrix}
-4\sin\frac{1}{2}kA\,\sin\frac{1}{2}kB\,\sin\frac{1}{2}kC, & k=4m\\
4\cos\frac{1}{2}kA\,\cos\frac{1}{2}kB\,\cos\frac{1}{2}kC, & k=4m+1\\
4\sin\frac{1}{2}kA\,\sin\frac{1}{2}kB\,\sin\frac{1}{2}kC, & k=4m+2\\
-4\cos\frac{1}{2}kA\,\cos\frac{1}{2}kB\,\cos\frac{1}{2}kC, & k=4m+3
\end{bmatrix}$$

$$(8)\quad \sin kA+\sin kB-\sin kC$$

$$=\begin{bmatrix}
-4\cos\frac{1}{2}kA\,\cos\frac{1}{2}kB\,\sin\frac{1}{2}kC, & k=4m\\
4\sin\frac{1}{2}kA\,\sin\frac{1}{2}kB\,\cos\frac{1}{2}kC, & k=4m+1\\
4\cos\frac{1}{2}kA\,\cos\frac{1}{2}kB\,\sin\frac{1}{2}kC, & k=4m+2\\
-4\sin\frac{1}{2}kA\,\sin\frac{1}{2}kB\,\cos\frac{1}{2}kC, & k=4m+3
\end{bmatrix}$$

(9)
$$\cos kA + \cos kB + \cos kC$$
$$= \left[\begin{array}{ll} -1 + 4\cos\frac{1}{2}kA\cos\frac{1}{2}kB\cos\frac{1}{2}kC, & k = 4m \\ 1 + 4\sin\frac{1}{2}kA\sin\frac{1}{2}kB\sin\frac{1}{2}kC, & k = 4m+1 \\ -1 - 4\cos\frac{1}{2}kA\cos\frac{1}{2}kB\cos\frac{1}{2}kC, & k = 4m+2 \\ -4\sin\frac{1}{2}kA\sin\frac{1}{2}kB\sin\frac{1}{2}kC, & k = 4m+3 \end{array}\right]$$

(10)
$$\cos kA + \cos kB - \cos kC$$
$$= \left[\begin{array}{ll} 1 + 4\sin\frac{1}{2}kA\sin\frac{1}{2}kB\cos\frac{1}{2}kC, & k = 4m \\ -1 + 4\cos\frac{1}{2}kA\cos\frac{1}{2}kB\sin\frac{1}{2}kC, & k = 4m+1 \\ 1 - 4\sin\frac{1}{2}kA\sin\frac{1}{2}kB\cos\frac{1}{2}kC, & k = 4m+2 \\ -1 - 4\cos\frac{1}{2}kA\cos\frac{1}{2}kB\sin\frac{1}{2}kC, & k = 4m+3 \end{array}\right].$$

(11)
$$\left\{\begin{array}{l} \sin^2 kA + \sin^2 kB + \sin^2 kC = -2 - 2(-1)^k \cos kA\cos kB\cos kC, \\ \sin^2 kA + \sin^2 kB - \sin^2 kC = -2(-1)^k \sin kA\sin kB\cos kC, \\ \cos^2 kA + \cos^2 kB + \cos^2 kC = 1 + 2(-1)^k \cos kA\cos kB\cos kC, \\ \cos^2 kA + \cos^2 kB + \cos^2 kC = 1 + 2(-1)^k \sin kA\sin kB\cos kC; \end{array}\right.$$

(12)
$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma\sin\left(A + \frac{1}{2}B\right) = \Sigma\cos\frac{1}{2}(C - A) \\ = -1 + 4\cos\frac{1}{4}(A - B)\cos\frac{1}{4}(B - C)\cos\frac{1}{4}(C - A), \\ \Sigma\cos\left(A + \frac{1}{2}B\right) = \Sigma\sin\frac{1}{2}(C - A) \\ = -4\sin\frac{1}{4}(A - B)\sin\frac{1}{4}(B - C)\sin\frac{1}{4}(C - A); \end{array}\right.$$

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

279. — Si $A + B + C = \pi$, démontrer que l'on a

1° $\Sigma \cos 3A \cos(B - C) + 4 \cos(A - B) \cos(B - C) \cos(C - A) = 0$;

2° $\Sigma \cos^3 A \cos(B - C) + \cos(A - B) \cos(B - C) \cos(C - A)$
$- 3 \cos A \cos B \cos C - 1 = 0$;

3° $\Sigma \cos 3A \cos^3(B - C) + 3 \cos(A - B) \cos(B - C) \cos(C - A)$
$+ 3 \cos A \cos B \cos C + 1 = 0$;

4° $$\Sigma \sin^4 A \sin(B - C)$$
$$+ 16 \sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C \sin\frac{1}{2}(A - B) \sin\frac{1}{2}(B - C) \sin\frac{1}{2}(C - A)$$
$$\times \left[\sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C + \cos\frac{1}{2}(A - B) \cos\frac{1}{2}(B - C) \cos\frac{1}{2}(C - A)\right] = 0;$$

5° $\text{tg}^2 A \,\text{tg}^2 B \,\text{tg}^2 C - \text{tg}^2 A - \text{tg}^2 B - \text{tg}^2 C = 2 + 2 \,\text{séc} A \,\text{séc} B \,\text{séc} C$;

6° $\left(1 + \text{tg}\frac{1}{4}A\right)\left(1 + \text{tg}\frac{1}{4}B\right)\left(1 + \text{tg}\frac{1}{4}C\right) = 2 + 2 \,\text{tg}\frac{1}{4}A \,\text{tg}\frac{1}{4}B \,\text{tg}\frac{1}{4}C$;

7° $$\left(1 + \cos\frac{1}{4}A\right)\left(1 + \cos\frac{1}{4}B\right)\left(1 + \cos\frac{1}{4}C\right)$$
$$= 2 + 2 \cos\frac{1}{4}A \cos\frac{1}{4}B \cos\frac{1}{4}C;$$

8° $$\left(2 + \text{tg}\frac{1}{4}A + \cos\frac{1}{4}A\right)\left(2 + \text{tg}\frac{1}{4}B + \cos\frac{1}{4}B\right)\left(2 + \text{tg}\frac{1}{4}C + \cos\frac{1}{4}C\right)$$
$$= 4\left(2 + \text{tg}\frac{1}{4}A \,\text{tg}\frac{1}{4}B \,\text{tg}\frac{1}{4}C + \cos\frac{1}{4}A \cos\frac{1}{4}B \cos\frac{1}{4}C\right).$$

(E. Gelin.)

280. — On a

$$(a + c)(a + 2c) \ldots (a + nc) + (-1)^{n-1}(b + c)(b + 2c) \ldots$$
$$(b + nc) = \mathfrak{M}\,[a + b + (n + 1)c].$$

(Catalan.)

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 6734-3-8.

UN CHAPITRE D'ARITHMÉTIQUE

NOMBRES INCOMMENSURABLES
LIMITES — MESURE DES GRANDEURS — RAPPORTS

Par M. **J. Griess**, professeur du cours préparatoire à Saint-Cyr, au Lycée d'Alger.

DES LIMITES

10. Définition. — Nous pouvons maintenant étendre l'idée de limite et dire :

Un nombre fixe a *(commensurable ou non) est la limite d'un nombre variable* x, *lorsque la loi des variations de* x *est telle, que la différence* a — x *finisse par devenir et rester inférieure, en valeur absolue, à un nombre* ε *donné à l'avance, si petit qu'il soit.*

11. Axiome. — Lorsque deux nombres variables sont toujours égaux, et que l'un tend vers une limite, l'autre tend vers la même limite.

12. Théorème I. — *Les termes successifs d'une suite convergente ont une limite : cette limite est le nombre défini par la suite.*

Soit le nombre A défini par la suite convergente

(1) $$a_1\ a_2\ \ldots\ a_n\ \ldots$$

Pour montrer que

$$\lim.\ a_n = \mathrm{A}$$

quand n croît indéfiniment, il suffit de faire voir que, pour n assez grand, la différence

$$\mathrm{A} - a_n$$

est, en valeur absolue, inférieure à un nombre ε donné à l'avance, si petit qu'il soit; ou que

$$\text{val. abs. } (\mathrm{A} - a_n) - \varepsilon < 0$$

La valeur absolue de $(\mathrm{A} - a_n)$ est définie par la suite

$$\text{v.a.}(a_1 - a_n), \ldots \text{v.a.}(a_2 - a_n) \ldots \text{v.a.}(a_{n-1} - a_n) \ldots \text{v.a.}(a_{n+p} - a_n) \ldots$$

sa différence avec ε est définie par

(2) $\text{v.a.}(a_1 - a_n) - \varepsilon, \text{v.a.}(a_2 - a_n) - \varepsilon \ldots \text{v.a.}(a_{n+p} - a_n) - \varepsilon \ldots$

Par hypothèse la suite (1) est convergente; on peut donc choisir n assez grand pour que

$$\text{v. abs. } (a_{n+p} - a_n) < \varepsilon,$$

quel que soit p. — A partir de ce rang n, les termes de la suite (2) sont constamment négatifs; le nombre correspondant est négatif, et

$$\text{val. abs. } (\mathrm{A} - a_n) < \varepsilon.$$

Donc $$\lim. a_n = \mathrm{A}$$

quand n croît indéfiniment.

13. Théorème II. — *Lorsqu'un nombre variable constamment croissant, est assujetti à rester moindre qu'un nombre* N, *il tend vers une limite inférieure ou égale à ce nombre.*

Considérons la suite des valeurs que prend le nombre variable

(1) $$a_1 \quad a_2 \ldots a_n \ldots$$

Je dis que cette suite est convergente.

D'abord $a_{n+1} - a_n$ tend vers o quand n croît indéfiniment. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait en effet trouver un rang n, tel qu'à partir de ce rang la différence $a_{n+1} - a_n$ fût supérieure à un nombre positif h. On aurait

$$a_{n+1} - a_n > h,$$
$$a_{n+2} - a_{n+1} > h,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n+p} - a_{n+p-1} > h;$$

d'où $$a_{n+p} - a_n > ph,$$
$$a_{n+p} > a_n + ph.$$

On pourrait choisir p de façon que

$$a_n + ph > \mathrm{N};$$

alors a_{n+p} serait supérieur à N, chose impossible par hypothèse. Ainsi, pour une valeur convenable de n, on a

$$a_{n+1} - a_n < \frac{\varepsilon}{p}$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} < \frac{\varepsilon}{p}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n+p} - a_{n+p-1} < \frac{\varepsilon}{p}$$

d'où
$$a_{n+p} - a_n < \varepsilon$$

et celà quel que soit p.

Donc la suite (1) est convergente, et ses termes successifs ont pour limite le nombre A qu'elle définit.

D'autre part, les termes de la suite

$$a_1 - \mathrm{N} \quad a_2 - \mathrm{N} \ldots a_n - \mathrm{N} \ldots$$

ne peuvent jamais être positifs; donc le nombre $\mathrm{A} - \mathrm{N}$ qu'elle définit est négatif ou nul.

$$\mathrm{A} \leqslant \mathrm{N}.$$

11. Théorème III. — On démontrerait de même le théorème suivant : ***Lorsqu'un nombre variable, constamment décroissant, est assujetti à rester supérieur à un nombre fixe, il a une limite supérieure ou égale à ce nombre.***

12. Théorème IV. — ***Si deux nombres variables ont une différence qui tend vers zéro, et si l'un d'eux a une limite, l'autre a la même limite.***

Soient

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$
$$b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$$

les suites de valeurs prises par les deux nombres. Les nombres de la première suite ayant une limite, cette suite est convergente; la limite est précisément le nombre A qu'elle définit (9).

Considérons la suite

$$b_1 - a_1, \ldots b_2 - a_2, \ldots b_n - a_n \ldots$$

Par hypothèse, $b_n - a_n$, tend vers zéro quand n croît indéfiniment; cette suite est donc convergente et le nombre qu'elle définit est nul.

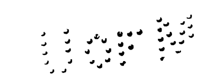
Donc la suite

$$a_1 + (b_1 - a_1) \quad a_2 + (b_2 - a_2) \ldots a_n + (b_n - a_n) \ldots$$

ou
$$b_1 \quad b_2 \ldots b_n \ldots$$

est convergente, et le nombre qu'elle définit est $0 + \mathrm{A}$; en d'autres termes

$$\lim.\ b_n = \mathrm{A}.$$



15. Théorème V (*). — *Si on a deux suites de nombres positifs, tels que tout nombre de la première suite soit moindre que tout nombre de la seconde et que la différence de deux nombres de même rang tende vers zéro, quand ce rang croît indéfiniment, on peut affirmer que les deux suites ont une limite commune.*

Soient

(1) $a_1 \quad a_2 \dots a_n \dots$

(2) $b_1 \quad b_2 \dots b_n \dots$

deux suites de nombres satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

Si les nombres de la première suite vont constamment en croissant, comme ils restent inférieurs à b_1 par hypothèse, ils ont une limite (10). Comme par hypothèse $b_n - a_n$ tend vers zéro, quand n croît indéfiniment

(12) $$\lim.\ b_n = \lim.\ a_n$$

et le théorème est démontré.

Si les nombres de la première suite ne vont pas toujours en croissant, partons de a_1 suivant l'ordre des indices, prenons le premier nombre supérieur à a_1, soit a_p; à partir de a_p continuons et prenons le premier nombre supérieur à a_p, soit a_q, etc.

Deux cas peuvent se présenter : ou bien à partir de l'un de ces nombres, on ne trouve plus dans la suite un nombre supérieur, ou bien la suite ainsi formée se prolonge indéfiniment.

Premier cas. — La suite s'arrête ; soit a_q le dernier terme; alors quel que soit n

$$a_n < a_q < b_n$$

et comme $b_n - a_n$ tend vers o, quand n croît indéfiniment il en sera de même de chacune des différences

$$a_q - a_n \qquad b_q - b_n$$

donc $$\lim.\ a_n = \lim.\ b_n = a_q$$

le théorème est encore démontré.

Deuxième cas. — La suite se prolonge indéfiniment.

$$a_1 \quad a_p \quad a_q \dots a_u \quad a_v \dots$$

(*) Ce théorème a été démontré pour la première fois par M. Jablonski dans les *Nouvelles annales de Mathématiques*, année 1881, t. XX, 2me série, p. 241. J'en reproduis l'énoncé et la démonstration à peu près tels qu'ils de trouvent dans ses *Compléments d'Algèbre* (Delalain, 1887).



Elle est formée de nombres tous croissants et inférieurs à b_1, ses termes ont donc une limite A.

Le nombre n étant donné, a_n tombe entre a_u et a_v et l'on a

$$A - a_u > A - a_n > A - a_v;$$

n croissant indéfiniment, il en sera de même de u et v, mais alors le premier et le dernier membre de l'inégalité précédente tendent vers o ; il en est de même du membre intermédiaire ; on a donc

$$\lim. a_n = A,$$

quand n croît indéfiniment.

Or, dans les mêmes conditions,

$$\lim. (b_n - a_n) = 0;$$

finalement, $$\lim. b_n - \lim. a_n = A.$$

(A suivre.)

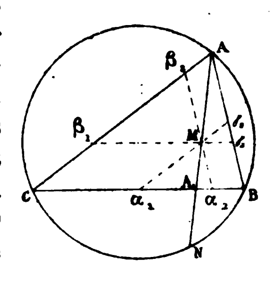
LES ÉQUATIONS DES POINTS REMARQUABLES

UNE PROPRIÉTÉ NOUVELLE DE LA TRANSVERSALE DU TRIANGLE

Par M. **H. Plamenewsky,** maître à l'École réale de Temir-Khan-Choura.

(*Suite*, v. p. 89.)

3. — La considération des coordonnées barycentriques permet de résoudre, assez simplement, certaines questions élémentaires, relatives aux distances des points remarquables. Nous allons considérer un point quelconque M, donné par ses coordonnées barycentriques (α, β, γ) et nous nous proposons de déterminer la distance δ de ce point M au centre O du cercle circonscrit au triangle de référence.



La droite AM rencontrant BC en A_1, on a

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{\gamma}{\beta};$$

d'où $$BA_1 = \frac{a\gamma}{\beta + \gamma}, \qquad CA_1 = \frac{a\beta}{\beta + \gamma}.$$

Le théorème de Stewart, appliqué à la détermination de AA_1, donne
$$AA_1 = \frac{\sqrt{\beta\gamma(b^2 + c^2 - a^2) + c^2\beta^2 + b^2\gamma^2}}{\beta + \gamma}.$$

La droite AA_1 rencontre, en N, le cercle circonscrit et l'on a
$$A_1N.AA_1 = BA_1.CA_1;$$
puis
$$A_1N = \frac{a^2\beta\gamma}{(\beta + \gamma)\sqrt{\beta\gamma(b^2 + c^2 - a^2) + c^2\beta^2 + b^2\gamma^2}}.$$

Enfin, si l'on observe que
$$\frac{MA_1}{AA_1} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma},$$
on trouve
$$MA.\,MN = (AA_1 - A_1M)(A_1M + A_1N),$$
ou, après calcul,
$$MA.MN = \frac{a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}.$$

Cette formule, comme on le voit, fait connaître, en coordonnées barycentriques, la puissance du point M, par rapport au cercle circonscrit.

En appelant R le rayon de ce cercle, on a
$$MA.MN = (R + \delta)(R - \delta) = R^2 - \delta^2.$$

Donc, finalement,
$$R^2 - \delta^2 = \frac{a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}.$$

Application. — 1° Pour le centre de gravité, $OG_1 = \delta_1$, $\alpha = \beta = \gamma$:
$$R^2 - \delta_1^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9},$$

2° Pour le centre I, du cercle inscrit, $OI = \delta_2$, $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$;
$$R^2 - \delta_2^2 = \frac{abc}{a + b + c} = 2Rr.$$

3° Pour le point de Lemoine, $KO = \delta_3$, $\frac{\alpha}{a^2} = \frac{\beta}{b^2} = \frac{\gamma}{c^2}$;
$$R^2 - \delta_3^2 = \frac{3a^2b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \qquad \text{Etc.}$$

Nous ferons observer, en terminant, comment on obtient les équations des points associés à un point donné M.

4. — Soit $$\frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} + \frac{\gamma}{w} = 0,$$
l'équation de M; en adoptant la terminologie proposée par M. de Longchamps, nous pourrons former le tableau suivant :

$\frac{1}{\alpha u} + \frac{1}{\beta v} + \frac{1}{\gamma w} = 0 \ldots$ point réciproque M_0.

$\frac{a^2}{\alpha u} + \frac{b^2}{\beta v} + \frac{c^2}{\gamma w} = 0 \ldots$ point inverse M_2,

$\frac{a^p}{\alpha u} + \frac{b^p}{\beta v} + \frac{c^p}{\gamma w} = 0 \ldots$ point réciproque d'ordre p, M^p,

$\frac{\alpha^p}{u} + \frac{\beta^p}{v} + \frac{\gamma^p}{w} = 0 \ldots$ potentiel d'ordre p, associé à M, M_p,

$\frac{a^p}{u} + \frac{b^p}{v} + \frac{c^p}{w} = 0 \ldots$ potentiel proprement dit, de l'ordre p.

On peut poursuivre ce tableau en y faisant successivement entrer : les points complémentaires, les points supplémentaires; les brocardiens, les isobariques et les semi-réciproques, les points algébriquement associés, etc.

5. — Parmi les points remarquables du triangle, on peut distinguer ceux dont l'équation est indépendante des paramètres algébriques et que, pour cette raison, on peut appeler *points numériques*. Nous citerons le centre de gravité, dont l'équation est
$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0,$$
et, naturellement, les points qui leur sont algébriquement associés et qui correspondent aux équations
$$-\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0, \quad \frac{1}{u} - \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0, \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} - \frac{1}{w} = 0.$$

Tels sont encore les *points numériques harmoniques* (*) correspondant aux équations:
$$\frac{2}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0, \quad \frac{1}{u} + \frac{2}{v} + \frac{1}{w} = 0, \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{2}{w} = 0.$$
et leurs points algébriquement associés, etc...

(*) Ces points sont les milieux des médianes.

Ces points numériques nous paraissent appelés à rendre de réels services dans la solution des questions pratiques telles que celles que soulève M. de Longchamps dans son « *Essai sur la Géométrie de la règle et de l'équerre* ». Car les égalités utilisées pour la solution des problèmes en question, sont précisément celles qui représentent les points numériques signalés ci-dessus.

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

ENTRE LES TROIS ANGLES D'UN TRIANGLE

Par M. l'abbé **E. Gelin,**
Professeur au Collège Saint-Quirin, à Huy (Belgique).

(*Suite*, v. p. 92.)

$$(13)\quad \begin{cases} \Sigma \sin A \cos B \cos C = \sin A \sin B \sin C, \\ \Sigma \cos A \sin B \sin C = 1 + \cos A \cos B \cos C; \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} \Sigma \sin A \cos (B - C) = 4 \sin A \sin B \sin C, \\ \Sigma \cos A \cos (B - C) = 1 + 4 \cos A \cos B \cos C; \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} \Sigma \sin^3 A \sin (B - C) = 0, \\ \Sigma \sin^3 A \cos (B - C) = 3 \sin A \sin B \sin C, \\ \Sigma \cos^3 A \sin(B-C) + \sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A) = 0, \\ \Sigma \cos^3 A \cos(B-C) + \cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A) \\ \qquad - 3 \cos A \cos B \cos C - 1 = 0; \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} \Sigma \sin 3A \sin (B - C) = 0, \\ \Sigma \sin 3A \cos (B - C) = 0, \\ \qquad \Sigma \cos 3A \sin (B - C) \\ + 4 \sin (A - B) \sin (B - C) \sin (C - A) = 0, \\ \qquad \Sigma \cos 3A \cos (B - C) \\ + 4 \cos (A - B) \cos (B - C) \cos (C - A) - 1 = 0; \end{cases}$$

$$(17)\quad \begin{cases} \Sigma \sin 3A \sin^3 (B - C) = 0, \\ \Sigma \sin 3A \cos^3 (B - C) = \sin 3A \sin 3B \sin 3C, \\ \qquad \Sigma \cos 3A \sin^3 (B - C) \\ + 3 \sin (A - B) \sin (B - C) \sin (C - A) = 0, \\ \Sigma \cos 3A \cos^3 (B-C) - 3\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A) \\ \qquad + \cos 3A \cos 3B \cos 3C + 1 = 0; \end{cases}$$

$$(18)\quad\begin{cases}\Sigma \sin^2 A \sin^2 (B-C) \\ = 3 \sin A \sin B \sin C \sin (A-B) \sin (B-C) \sin (C-A), \\ \Sigma \sin A \sin^3 (B-C) \\ = 4 \sin A \sin B \sin C \sin (A-B) \sin (B-C) \sin (C-A), \\ \Sigma \sin A \sin 3 (B-C) \\ = -16 \sin A \sin B \sin C \sin (A-B) \sin (B-C) \sin (C-A), \\ \Sigma \sin^5 A \sin (B-C) \\ = - \sin A \sin B \sin C \sin (A-B) \sin (B-C) \sin (C-A);\end{cases}$$

$$(19)\quad\begin{cases}\Sigma \sin^3 A = 3 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C + \cos \frac{3}{2} A \cos \frac{3}{2} B \cos \frac{3}{2} C, \\ \Sigma \cos^3 A = 1 + 3 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C \\ - \sin \frac{3}{2} A \sin \frac{3}{2} B \sin \frac{3}{2} C;\end{cases}$$

$$(20)\quad\begin{cases}\Sigma \sin^4 A = \frac{3}{2} + 2 \cos A \cos B \cos C + \frac{1}{2} \cos 2A \cos 2B \cos 2C, \\ \Sigma \cos^4 A = \frac{1}{2} - 2 \cos A \cos B \cos C + \frac{1}{2} \cos 2A \cos 2B \cos 2C\end{cases}$$

$$(21)\quad\begin{cases}\Sigma \sin 2A \sin^2 A = 2 \sin A \sin B \sin C + \sin 2A \sin 2B \sin 2C, \\ \Sigma \sin 2A \cos^2 A = 2 \sin A \sin B \sin C - \sin 2A \sin 2B \sin 2C, \\ \Sigma \cos 2A \sin^2 A = -1 - 2 \cos A \cos B \cos C \\ - \cos 2A \cos 2B \cos 2C, \\ \Sigma \cos 2A \cos^2 A = -2 \cos A \cos B \cos C \\ + \cos 2A \cos 2B \cos 2C;\end{cases}$$

$$(22)\quad\begin{cases}\Sigma \sin A \sin (A-B) \sin (A-C) = \sin A \sin B \sin C \\ - \sin 2A \sin 2B \sin 2C, \\ \Sigma \sin A \cos (A-B) \cos (A-C) = 3 \sin A \sin B \sin C \\ + \sin 2A \sin 2B \sin 2C, \\ \Sigma \cos A \sin (A-B) \sin (A-C) = \cos A \cos B \cos C \\ + \cos 2A \cos 2B \cos 2C, \\ \Sigma \cos A \cos (A-B) \cos (A-C) = 1 + 3 \cos A \cos B \cos C \\ - \cos 2A \cos 2B \cos 2C;\end{cases}$$

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &1 + \cos A \cos B \cos C \\ &= \sin^2 A + \sin B \sin C \cos A = \frac{\sin^3 A \cos B - \sin^3 B \cos A}{\sin (A - B)} \\ &= \sin^2 B + \sin C \sin A \cos B = \frac{\sin^3 B \cos C - \sin^3 C \cos B}{\sin (B - C)} \\ &= \sin^2 C + \sin A \sin B \cos C = \frac{\sin^3 C \cos A - \sin^3 A \cos C}{\sin (C - A)}; \end{aligned}\right.$$

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &(\cos A + \sin A)(\cos B + \sin B)(\cos C + \sin C) \\ &= 4 \cos \frac{1}{4}\pi \cos\left(\frac{1}{4}\pi - A\right)\cos\left(\frac{1}{4}\pi - B\right)\cos\left(\frac{1}{4}\pi - C\right) \\ &= 1 + 2 \sin A \sin B \sin C + 2 \cos A \cos B \cos C, \\ &(\cos A - \sin A)(\cos B - \sin B)(\cos C - \sin C) \\ &= 4 \sin \frac{1}{4}\pi \sin\left(\frac{1}{4}\pi - A\right)\sin\left(\frac{1}{4}\pi - B\right)\sin\left(\frac{1}{4}\pi - C\right) \\ &= 1 - 2 \sin A \sin B \sin C + 2 \cos A \cos B \cos C; \end{aligned}\right.$$

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tg} kA + \operatorname{tg} kB + \operatorname{tg} kC = \operatorname{tg} kA \operatorname{tg} kB \operatorname{tg} kC, \\ &\operatorname{tg} kA - \cot kB - \cot kC = \operatorname{tg} kA \cot kB \cot kC, \\ &\cot kA \cot kB + \cot kB \cot kC + \cot kC \cot kA = 1, \\ &\Sigma \frac{\cot kA + \cot kB}{\operatorname{tg} kA + \operatorname{tg} kB} = 1; \end{aligned}\right.$$

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\cot\frac{1}{2}A + \cot\frac{1}{2}B + \cot\frac{1}{2}C = \cot\frac{1}{2}A \cot\frac{1}{2}B \cot\frac{1}{2}C, \\ &\cot\frac{1}{2}A - \operatorname{tg}\frac{1}{2}B - \operatorname{tg}\frac{1}{2}C = \cot\frac{1}{2}A \operatorname{tg}\frac{1}{2}B \operatorname{tg}\frac{1}{2}C, \\ &\operatorname{tg}\frac{1}{2}A \operatorname{tg}\frac{1}{2}B + \operatorname{tg}\frac{1}{2}B \operatorname{tg}\frac{1}{2}C + \operatorname{tg}\frac{1}{2}C \operatorname{tg}\frac{1}{2}A = 1, \\ &\Sigma \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}A + \operatorname{tg}\frac{1}{2}B}{\cot\frac{1}{2}A + \cot\frac{1}{2}B} = 1; \end{aligned}\right.$$

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &\cot kA + \cot kB + \cot kC \\ &= \frac{-(-1)^k + \cos kA \cos kB \cos kC}{\sin kA \sin kB \sin kC}, \\ &\cot kA - \operatorname{tg} kB - \operatorname{tg} kC \\ &= \frac{(-1)^k + \cos kA \sin kB \sin kC}{\sin kA \cos kB \cos kC}, \\ &\Sigma \operatorname{tg} kA \operatorname{tg} kB = 1 - (-1)^k \operatorname{séc} kA \operatorname{séc} kB \operatorname{séc} kC; \end{aligned}\right.$$

$$(28)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{1}{2}A + \operatorname{tg}\frac{1}{2}B + \operatorname{tg}\frac{1}{2}C \\ \quad = \dfrac{1 + \sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}C}, \\ \cot\frac{1}{2}A + \cot\frac{1}{2}B - \operatorname{tg}\frac{1}{2}C \\ \quad = \dfrac{1 - \cos\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}C}, \\ \Sigma \cot\frac{1}{2}A \cot\frac{1}{2}B = 1 + \operatorname{coséc}\frac{1}{2}A \operatorname{coséc}\frac{1}{2}B \operatorname{coséc}\frac{1}{2}C; \end{cases}$$

$$(29)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B \operatorname{tg}^2 C - \operatorname{tg}^2 A - \operatorname{tg}^2 B - \operatorname{tg}^2 C \\ \quad = 2 \operatorname{séc} A \operatorname{séc} B \operatorname{séc} C + 2, \\ \operatorname{tg}^3 A \operatorname{tg}^3 B \operatorname{tg}^3 C - \operatorname{tg}^3 A - \operatorname{tg}^3 B - \operatorname{tg}^3 C = \dfrac{3 \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{\cos A \cos B \cos C}; \\ \Sigma\left(\dfrac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} + \dfrac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A}\right) = \operatorname{séc} A \operatorname{séc} B \operatorname{séc} C - 2, \end{cases}$$

$$(30)\quad \begin{cases} \operatorname{séc} A \operatorname{séc} B \operatorname{séc} C(1 + \operatorname{séc} A \operatorname{séc} B \operatorname{séc} C) \\ = (\operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B)(1 + \operatorname{tg}^2 C) \\ = (\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg}^2 B \operatorname{tg}^2 C)(1 + \operatorname{tg}^2 A) \\ = (\operatorname{tg}^2 C + \operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A + \operatorname{tg}^2 C \operatorname{tg}^2 A)(1 + \operatorname{tg}^2 B); \end{cases}$$

$$(31)\quad \begin{cases} \left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{4}A\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{4}B\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{4}C\right) \\ = 2 + 2\operatorname{tg}\frac{1}{4}A \operatorname{tg}\frac{1}{4}B \operatorname{tg}\frac{1}{4}C, \\ \left(1+\cot\frac{1}{4}A\right)\left(1+\cot\frac{1}{4}B\right)\left(1+\cot\frac{1}{4}C\right) \\ = 2 + 2\cot\frac{1}{4}A \cot\frac{1}{4}B \cot\frac{1}{4}C, \\ \left(2 + \operatorname{tg}\frac{1}{4}A + \cot\frac{1}{4}A\right)\left(2 + \operatorname{tg}\frac{1}{4}B + \cot\frac{1}{4}B\right) \\ \left(2+\operatorname{tg}\frac{1}{4}C + \cot\frac{1}{4}C\right) \\ = 4\left(2+\operatorname{tg}\frac{1}{4}A \operatorname{tg}\frac{1}{4}B \operatorname{tg}\frac{1}{4}C + \cot\frac{1}{4}A \cot\frac{1}{4}B \cot\frac{1}{4}C\right). \end{cases}$$

Dans ces formules, k représente un *entier quelconque*, positif ou négatif.

On obtient d'autres formules, si, au lieu de A, B, C, on met

$$\frac{2}{3}\pi - A, \quad \frac{2}{3}\pi - B. \quad \frac{2}{3}\pi - C.$$

ou $$\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}A, \quad \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}B, \quad \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}C,$$

ou, plus généralement,

$$\frac{1}{3}\pi + \left(\frac{1}{3}\pi - A\right)x, \quad \frac{1}{3}\pi + \left(\frac{1}{3}\pi - B\right)x, \quad \frac{1}{3}\pi + \left(\frac{1}{3}\pi - C\right)x,$$

x étant un *nombre quelconque* (*).

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 58.)

CHAPITRE VII

LA DISTANCE DE DEUX POINTS INACCESSIBLES

Parmi les problèmes de la Géométrie pratique, concernant deux points inaccessibles, le plus important est celui que nous abordons maintenant. Nous voulons parler de la détermination de la distance de ces deux points. De nombreuses solutions ont été proposées pour cette question; nous ferons connaître les principales, en mentionnant les avantages ou les inconvénients qu'elles nous paraissent présenter. Nous indiquerons aussi d'autres solutions, plus simples ou mieux appropriées à

(*) Page 95, dans les formules (9), le premier terme de la dernière ligne est 1.

Même page, dans la formule (11), le troisième terme de la dernière ligne est $-\cos^2 kC$.

certaines difficultés. La marche que nous indiquons ici, pour les développements qui vont suivre, est d'ailleurs, comme on peut l'observer, conforme au plan que nous avons adopté dans la rédaction des chapitres précédents.

71. La méthode cartésienne. — Voici quel est le principe de cette méthode. Imaginons une figure inaccessible F constituée par un certain nombre de points A, B, C, ... Traçons, dans la région accessible, deux droites rectangulaires OX, OX′ et, au moyen de l'équerre d'arpenteur, déterminons sur OX et sur OX′ les points a, b, c, ..., d'une part; a', b', c', ... d'autre part; représentant les projections, sur ces droites des points A, B, C, ... Si les deux ponctuelles a, b, c, ...; a', b', c', ... sont situées dans la région accessible, on comprend que des mesures effectuées sur elles permettront de déterminer certaines longueurs relatives à la figure inaccessible F. Tel est, en peu de mots, le principe de cette méthode; on voit pourquoi nous la nommons *méthode cartésienne* (*).

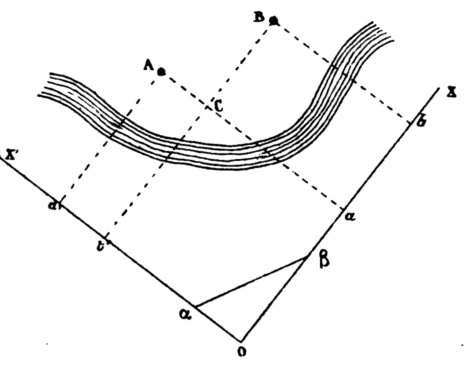


Fig. 227.

En particulier, si nous considérons deux points A et B; après avoir relevé les longueurs ab, $a'b'$, nous aurons la distance inconnue AB par la formule

$$AB = \sqrt{(ab)^2 + (a'b')^2}.$$

Si l'on veut éviter tout calcul, on pourra, au moyen d'un cordeau, prendre

$$O\beta = ab, \qquad O\alpha = a'b';$$

alors $\alpha\beta$ est la longueur cherchée.

(*) L'idée que nous exposons ici, qui repose sur la considération de deux aires tracés dans la partie accessible, se trouve appliquée à la mesure des aires des polygones inaccessibles dans les *éléments de Géométrie* de l'abbé Reydellet, revue par l'abbé Reboul. 7e édition, p. 499.

Dans le cas où l'on ne possèderait qu'une fausse équerre, on répéterait les constructions précédentes, comme l'indique la figure 228. On jalonne les droites OX, OX', sur deux lignes de visées fournies par les branches de la fausse équerre, supposées fixes pendant tout le cours des opérations. Le triangle $O\alpha\beta$, ainsi déterminé, est égal au triangle CAB ; on a donc encore

$$\alpha\beta = AB.$$

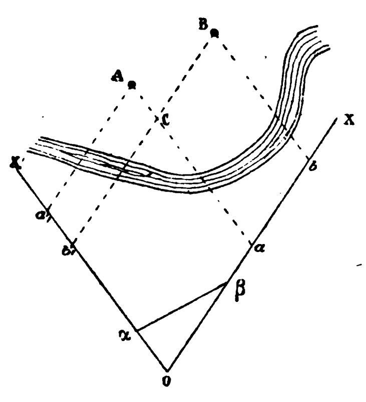


Fig. 228.

72. La méthode pseudo-cartésienne. — La solution que nous venons d'exposer est, au point de vue pratique, soumise à une objection sérieuse elle exige, en effet, que les segments *ab*, *a'b'* soient situés, l'un et l'autre, dans la région accessible; or, quels que soient les axes OX, OX' choisis dans cette région, il peut se faire que l'un au moins de ces segments soit rejeté dans la partie inaccessible.

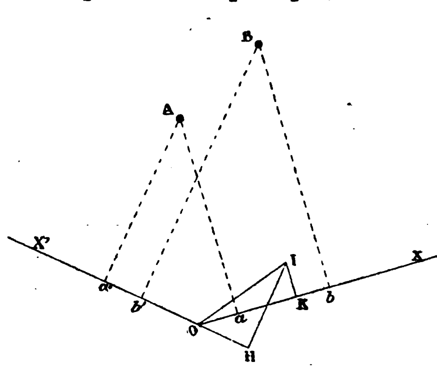


Fig. 229.

Lorsque cette circonstance se présente, voici comment on peut modifier la méthode précédente.

Il est toujours possible de choisir l'un des axes (OX_1, par exemple) de façon que la projection *ab*, de AB, sur cette droite, se fasse dans le voisinage du point O. Si l'on jalonne ensuite une droite OX' faisant, avec OX, un angle suffisamment obtus, la projection *a'b'* de AB, sur OX', se fera, dans le voisinage du

point O. Cela posé, prenons OH = $a'b'$, OK = ab ; les perpendiculaires élevées aux points H, B, aux axes OX, OX', se coupent en un certain point I ; OI est une droite égale et parallèle à AB. On le voit immédiatement en observant que, si l'on mène OI égale et parallèle à AB, les projections de OI, sur les axes OX, OX', doivent être respectivement égales à ab et à $a'b'$.

Remarque I. — En appliquant cette méthode, on doit soigneusement observer que les distances OH et OK doivent être non seulement égales aux longueurs respectives $a'b'$, ab, mais qu'elles doivent encore avoir *la même direction*.

Remarque II. — La solution précédente donne lieu à une vérification qu'on ne doit pas négliger, si l'on veut opérer avec exactitude. En plaçant la fausse équerre au point O, on pourra relever l'angle AOI; supposons que cet angle soit aigu. Alors, après avoir transporté l'instrument en I, les branches étant restées invariables, l'angle OIB, observé en I, doit être égal à l'angle obtus, marqué par ces branches.

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Neuberg (*).

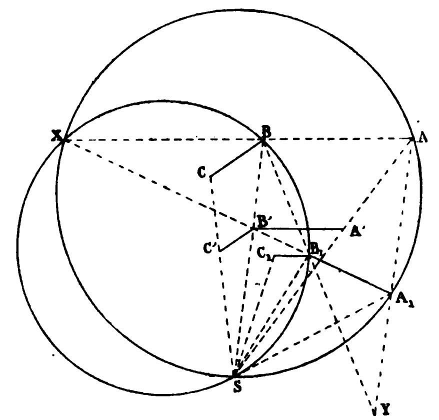
... Effectivement le théorème de M. Fitz-Patrick (*J. M. E.* 1888, p. 18) est un cas particulier d'une proposition que j'ai énoncée dans une Note faisant suite à un article de M. Tarry sur les *Propriétés générales de trois figures semblables* (*Mathesis*, t. II, p. 77) et qui m'avait été suggérée par un théorème de M. H. Van Aubel (*Mathesis*, t. I, p. 106). Il a été retrouvé dernièrement par M. Catalan (*Ibid.*, t. VII, question 586), et j'en ai proposé une généralisation et un complément dans la ques-

(*) M. Tarry ayant attiré notre attention sur le rapprochement à établir entre la question 211 et un théorème de M. Neuberg, nous avons invité notre honorable collègue de l'Université de Liége à nous communiquer quelques renseignements sur ce sujet. Il répond, dans la lettre qu'on va lire, avec sa compétence et son obligeance habituelles, à la demande que nous lui avions adressée. (G. L.)

tion 587. On peut également le rattacher à de belles recherches de M. Mannheim sur le limaçon de Pascal (*Nouvelles Annales*, 1[re] série, t. XV, p. 289; *Mathesis*, t. I, pp. 43 et 66).

La question présentant un grand intérêt, vos jeunes lecteurs vous sauront gré de leur faire connaître quelques détails sur la théorie générale (**) dont elle dépend.

1. Soit ABC... ≡ P une ligne brisée quelconque. Sur les rayons vecteurs SA, SB, SC ... allant d'un point fixe S aux sommets de P, prenons les longueurs SA′, SB′, SC′, ... proportionnelles à ces rayons; nous aurons les sommets d'une ligne A′B′C′ ... ≡ P′ *homothétique* à P. Faisons tourner P d'un angle quelconque autour de S; soit $A_1B_1C_1$ ... ≡ P_1 la nouvelle position de P′. Les lignes P, P_1 seront simplement semblables, et S en est le *centre de similitude* ou le *point double*.



Réciproquement, étant données deux lignes polygonales directement semblables P et P_1, il existe toujours un point S, tel que l'on peut déduire P_1, de P, en modifiant dans un rapport constant les rayons vecteurs allant de S à tous les points de la ligne P; puis en faisant tourner ensuite les nouvelles extrémités des rayons vecteurs d'un certain angle autour de S. En effet, si X est l'intersection des droites AB, A_1B_1, les circonférences XAA_1, XBB_1 se coupent en un point S, sommet de deux triangles équiangles SAB, SA_1B_1, et il est facile de voir que les triangles SBC et SB_1C_1, ... sont semblables. La similitude des triangles SAB, SA_1B_1 entraînant celle des triangles SAA_1

(**) La théorie du centre de similitude, avec ses applications, est très bien exposée dans l'opuscule « Méthodes et Théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques » par *Pétersen*.

SBB_1, nous voyon saussi que les circonférences YAB, YA_1B_1, Y étant le point de rencontre des droites AA_1 et BB_1, passent par le même point S; ce qui démontre un théorème connu.

La double opération qui nous a servi à passer de P à P_1 peut être énoncée autrement : *Sur les rayons vecteurs* SA, SB, SC *d'une ligne brisée, on construit des triangles directement semblables* SAA_1, SBB_1, SCC_1, ... ; *les points* A_1. B_1. C_1. *sont les sommets d'une ligne semblable à* P.

2. Divisons, dans un même rapport, les droites AA_1, BB_1 CC_1,..., qui joignent les sommets de deux polygones directement semblables P, P_1 ; soient a_1, b_1, c_1,... les points de division. Les triangles SAa_1, SBb_1, SCc_1... étant semblables, le polygone $a_1b_1c_1$... est semblable à P et P_1 (Théorème de M. H. Van Aubel ; voir *Mathesis*, t. I, pp. 95 et 106).

Plus généralement, si l'on construit des triangles directement semblables AA_1a_1, BB_1b_1, CC_1c_1,..., les points a_1, b_1, c_1..., sont les sommets d'un polygone semblable à P et P_1.

3. Considérons plusieurs lignes brisées semblables P, P_1, P_2, ... P_n. Affectons tous les sommets de P d'une masse m, ceux de P_1 d'une masse m_1, ceux de P_2 d'une masse m_2, etc. Pour trouver le centre de gravité des points A, A_1, A_2. .., on divise AA_1 au point a_1, dans le rapport $m_1 : m$, aA_2 au point a_2 dans le rapport $m_2 : m + m_1$, et ainsi de suite. D'après ce qu'on vient de voir, les lignes polygonales $a_1b_1c_1$.., a_2b_2c..., $a_nb_nc_n$ ... sont semblables à P, P_1,...

4. Ces propositions s'étendent immédiatement à des courbes semblables.

Donc : *Si plusieurs masses* m, m_1, m_2... *décrivent, simultanément, des courbes semblables, de manière à se trouver, à chaque instant, en des points homologues de ces lignes, leur centre de gravité décrit une ligne semblable à ces courbes.*

5. Deux cas particuliers conduisent à des résultats fort curieux Considérons d'abord deux mobiles parcourant, avec des vitesses constantes les droites XA, XA_1. Soient (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1), ... des positions simultanées de ces mobiles. Les deux systèmes de points A, B, C..., A_1, B_1, C_1..., étant semblables, on a le théorème suivant :

Lorsque deux mobiles A, A_1 *parcourent uniformément les droites* XY,XY_1, *la circonférence* XAA_1 *passe par un point fixe* S ; *le sommet* a *d'un triangle* AA_1a, *qui reste toujours semblable à lui-même, décrit également une droite avec une vitesse constante.*

De ce que la droite AA_1 est vue, de S, sous un angle constant, on peut conclure qu'elle enveloppe une parabole tangente à XY et XY_1, et ayant pour foyer le point S (*).

Il résulte, du 4°, que : *Si des mobiles de masses* m, m_1, m_2... *sont animés de mouvements rectilignes uniformes, leur centre de gravité a aussi un tel mouvement* (**).

6. Deux circonférences quelconques (O), (O_1) situées dans un même plan peuvent être considérées, d'une infinité de manières, comme deux figures directement semblables : au rayon OA de la première, faisons correspondre un rayon *quelconque* O_1A_1 de la seconde ; si ces droites tournent avec la même vitesse angulaire (dans le même sens) autour des centres, leurs extrémités gradueront semblablement les deux circonférences. Soit X le point de rencontre des rayons homologues OA, O_1A_1 ; ce point décrit une circonférence (ω'). passant par O et O_1. Les circonférences XAA_1 et XOO_1 se coupent en un point S autre que X ; S est le centre de similitude correspondant au mode actuel de graduation. Lorsque ce mode change, S décrit la *circonférence de similitude*, laquelle a pour diamètre la distance des centres d'homothétie de (O) et (O_1) ; car les lignes homologues SO, SO_1 sont proportionnelles aux rayons R, R_1.

D'après le 4°, *un point* a *qui divise, dans un rapport constant, la distance de deux points homologues* AA_1 *décrit une circonférence* (***).

Plus généralement, le sommet *a*, d'un triangle AA_1a qui reste toujours semblable à lui-même, décrit une circonférence,

(*) Lorsque les trajectoires A, A_1 ne sont pas dans un même plan, la droite AA_1 engendre un paraboloïde hyperbolique.

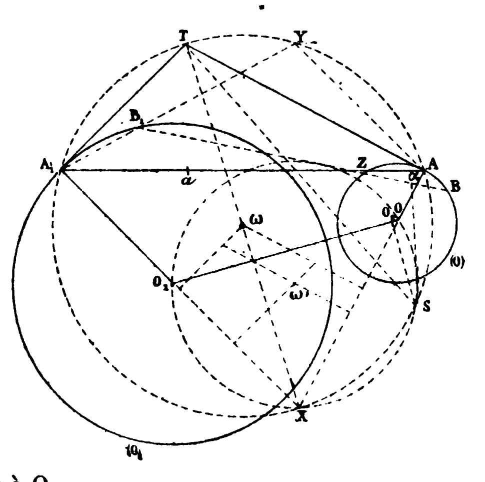
(**) Cette proposition subsiste également dans le cas où les trajectoires ne sont pas situées dans un même plan ; car, une projection cylindrique des mobiles faite sur un même plan, n'altère pas le caractère de leurs mouvements.

(***) La démonstration de M. Crabit (*J. M. E.* 1888, p. 20) s'applique également au cas où la droite AA_1 est divisée dans un rapport constant.

dont le centre o est le sommet d'un triangle OO_1o semblable à AAa.

La droite AA_1 enveloppe une conique, dont il est facile de déterminer les axes.

En effet, soient α, O_2 les projections de S sur les droites AA_1, OO_1. Le triangle SAA_1 étant toujours semblable à lui-même, le point α divise AA_1 dans un rapport constant et, par suite, décrit une circonférence dont le centre est évidemment O_2. Donc d'après un théorème connu, la droite AA_1 enveloppe une conique dont le cercle principal a pour centre O_2 et pour rayon $O_2\alpha$; les foyers de cette courbe sont le point S et son symétrique par rapport à O_2.



Pour trouver le point de contact de AA_1 avec son enveloppe, considérons un second couple B, B_1 de points homologues des deux circonférences (O) et (O_1), et soient Y le point de rencontre des droites AB et A_1B_1, Z celui des droites AA_1 et BB_1. Les quatre circonférences YAA_1, YBB_1, ZAB, ZA_1B_1 passent par le centre de similitude S. Si l'on fait tendre B vers B_1, la limite du point Z est à la rencontre de AA_1 avec les deux circonférences passant par S et touchant les circonférences (O), (O_1) respectivement en A et A_1.

Autrement. Les triangles ZAB, ZA_1B_1 donnent.

$$\frac{ZA}{AB} = \frac{\sin ZBA}{\sin AZB}, \qquad \frac{ZA_1}{A_1B_1} = \frac{\sin ZB_1A_1}{\sin A_1ZB_1},$$

d'où

$$\frac{ZA}{ZA_1} = \frac{AB \sin ZBA}{A_1B_1 \sin ZB_1A_1} = \frac{R \sin ZBA}{R_1 \sin ZB_1A_1},$$

$$\lim.\frac{ZA}{ZA_1} = \frac{R \cos OAA_1}{R \cos O_1A_1A}.$$

Donc le point de contact de AA_1, avec son enveloppe, divise AA_1 dans le rapport des cordes interceptées, sur cette droite, par les cercles donnés (*).

8. Nous avons vu (§ 6) que la circonférence XAA_1 passe par un point fixe S. On démontre facilement que son centre ω décrit une circonférence. *(Mannheim)*; car les perpendiculaires aux milieux des droites XO, XA, XO_1, XA_1 forment un parallélogramme de grandeur constante, les angles étant invariables et les hauteurs égales à $\frac{1}{2}R, \frac{1}{2}R_1$; la diagonale $\omega\omega'$ est donc constante.

Il résulte de là que la circonférence XAA_1 enveloppe un limaçon de Pascal. En effet, l'enveloppe est le lieu des symétriques de S par rapport aux tangentes menées à la circonférence que décrit le centre ω (*Mathesis*, t. I, p. 67).

Soit T le point de concours des tangentes menées en A et A_1 aux cercles (O), (O_1). M. Mannheim a observé que le point T décrit un limaçon de Pascal ayant pour pôle le centre de similitude S. Voici une démonstration très simple de ce théorème. Les tangentes AT, A_1T étant des lignes homologues par rapport aux deux cercles (O), $(O)_1$, leurs distances à S sont dans le rapport $R : R_1$, et comme elles font un angle constant, l'angle STA est invariable; (**) donc T décrit une podaire oblique de S par rapport à chacun des cercles donnés.

9. Le théorème de M. Fitz-Patrick admet encore la génération suivante : *Des droites* OA, O_1A_1, O_2A_2, ... *tournent avec la même vitesse angulaire autour de leurs extrémités* O, O_1, O_2, ...; *leurs secondes extrémités* A, A_1, A_2, ... *étant affectées de masses quelconques* m, m_1, m_2, ..., *le barycentre* (***) *de ces masses décrit une circonférence ayant pour centre le barycentre des points* O, O_1, O_2 ... *chargés des mêmes masses* m, m_1, m_2, ...

(*) *Nouvelle Correspondance*, t. VI, p. 463 et 514; *Mathesis*, t. I, p. 66.

(**) C'est ce qu'on peut également déduire du quadrilatère inscriptible $SATA_1$: *angle* $A_1TS = SAA_1 =$ const.

(***) Menons, par un même point U, les droites UD, UD_1, UD_2, égales et parallèles à OA, O_1A_1, O_2A_2 ; lorsque m, m_1, m_2 sont proportionnelles aux aires UD_1D_2, UD_2D_1, UDD_1, le barycentre de ces masses placées en A, A_1, A_2, est immobile.

Comme M. Tarry l'a fait remarquer, si les rayons OA, O_1A_1 tournent avec la même vitesse angulaire en sens contraire, le barycentre des points A, A_1 décrit une conique.

Le théorème du §4 subsiste encore pour des courbes homographiques quelconques, pourvu que la droite de l'infini soit sa propre homologue par rapport à ces courbes. C'est ce qui résulte des formules de transformation

$$x = ax' + by' + c, \qquad y = a_1x' + b_1y' + c_1,$$

propres à ce cas.

EXERCICES DIVERS *(Suite.)*

Par M. **Boutin**, professeur au collège de Courdemanche.

67. — On considère un demi-cercle de rayon R, de diamètre AB, dont on partage la circonférence en n parties égales, aux points B_1, B_2, ... B_{n-1}. Vers quelle limite tend la moyenne arithmétique des cordes AB, AB_1, AB_2, ... quand n augmente indéfiniment?

Soit S la somme de ces cordes.

$$S = 2R\left[1 + \cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \ldots + \cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right],$$

$$S = 2R\,\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\frac{\pi}{4n}}.$$

$$\lim\frac{S}{n} = R.2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right).\frac{4}{\pi}\left(\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\right)$$

$$\lim\frac{S}{n} = \frac{4R}{\pi}.$$

68. — On considère deux axes rectangulaires Ox, Oy; on prend, sur Ox, une longueur $OA = a$; on partage OA en n parties égales, sur chacune desquelles, comme diamètre, on

décrit une circonférence. D'un point fixe P de Oy, on mène une tangente à chacune d'elles. Quelle est la limite vers laquelle tend la moyenne arithmétique des carrés de toutes ces tangentes, quand n augmente indéfiniment, OA restant fixe?

La distance du centre du p^{me} cercle, à O, est donnée par la formule

$$d^2 = PO^2 + \frac{(2p-1)^2}{4n^2}a^2;$$

d'où, pour la tangente TP :

$$TP^2 = PO^2 + \frac{(2p-1)^2a^2 - a^2}{4n^2} = PO^2 + \frac{p(p-1)a^2}{n^2};$$

puis, pour la somme S des carrés des tangentes,

$$S = nPO^2 + \frac{a^2}{n^2}\Sigma_1^n p(p-1)$$

$$= nPO^2 + \frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{n(n^2-1)}{3}.$$

Donc $$\lim \frac{1}{n} S = PO^2 + \lim \frac{a^2}{3}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = PO^2 + \frac{a^2}{3}$$

69. — Calculer les angles d'un triangle connaissant l'angle de Brocard θ et sachant, en outre, que l'on a :

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{2}{\cot\theta - 1}.$$

Prenons cotg A, cotg B, cotg C pour inconnues, x, y, z, et observons que

$$\sin 2A = \frac{2\cot A}{1 + \cot^2 A}.$$

Les équations du problème sont:

(1) $$\cot\theta = x + y + z = \Sigma x,$$

(2) $$1 = xy + xz + yz = \Sigma xy,$$

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} = \frac{1}{\cot\theta - 1}.$$

Cette dernière équation peut être écrite ainsi:

$$\frac{x(1+y^2)(1+z^2) + y(1+x^2)(1+z^2) + z(1+x^2)(1+y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} = \frac{1}{\cot\theta - 1},$$

ou $$\frac{\Sigma x + \Sigma xy^2 + xyz\Sigma xy}{1 + \Sigma x^2 + \Sigma x^2y^2 + x^2y^2z^2} = \frac{1}{\cot\theta - 1}.$$

Tenant compte de (1) et (2), et observant que

$$\Sigma x^2 = (\Sigma x)^2 - 2\Sigma xy = \cot^2\theta - 1,$$

$$\Sigma xy^2 = \Sigma xy.\Sigma x - 3xyz = \cot\theta - 3xyz,$$

$$\Sigma x^2y^2 = (\Sigma xy)^2 - 2xyz\Sigma x = 1 - 2xyz\cot\theta,$$

(3) devient

$$\frac{2(\cot\theta - xyz)}{x^2y^2z^2 - 2\cot\theta\, xyz + \cot^2\theta} = \frac{1}{\cot\theta - 1},$$

d'où

(4) $$xyz = 2 - \cot\theta.$$

(1), (2), (4) montrent que x, y, z sont racines de l'équation

$$X^3 - \text{cotg}\,\theta\, X^2 + X - 2 + \text{cotg}\,\theta = 0,$$

laquelle admet, à première vue, la racine 1. Donc $A = 45°$. cotg B et cotg C sont racines de l'équation

$$X^2 + X(1 - \text{cotg}\,\theta) + 2 - \text{cotg}\,\theta = 0.$$

QUESTION 223

Solution par M. l'abbé E. Gelin, professeur au collège Saint-Quirin, à Huy.

ABCP, DEFQ *sont deux circonférences concentriques* ; ABC, DEF *deux triangles équilatéraux quelconques, inscrits à ces deux circonférences* ; P *et* Q *des points pris sur chacune de ces circonférences. Démontrer que l'on a :*

$$\overline{QA}^4 + \overline{QB}^4 + \overline{QC}^4 = \overline{PD}^4 + \overline{PE}^4 + \overline{PF}^4.$$

(G. Russo.)

Posons $OP = R$, $OQ = R'$, $QOA = x$.

On a

$$\left.\begin{aligned} \overline{QA}^2 &= R^2 + R'^2 - 2RR'\cos x, \\ \overline{QB}^2 &= R^2 + R'^2 - 2RR'\cos(120° + x). \\ \overline{QC}^2 &= R^2 + R'^2 - 2RR'\cos(120° - x), \end{aligned}\right\}(1)$$

D'autre part, en élevant au carré ces égalités, puis en ajoutant, on a

$$\begin{aligned} \overline{QA}^4 + \overline{QB}^4 + \overline{QC}^4 = 3(R^2 + R'^2)^2 - 4RR'(R^2 + R'^2) \\ [\cos x + \cos(120° + x) + \cos(120° - x)] \\ + 4R^2R'^2[\cos^2 x + \cos^2(120° + x) + \cos^2(120° - x)] \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \cos x + \cos(120° + x) + \cos(120 - x) &= \cos x + 2\cos 120° \cos x \\ &= \cos x - \cos x = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \cos^2(120° + x) + \cos^2(120° - x) &= \cos^2 x + 2\cos^2 120° \cos^2 x \\ &\quad + 2\sin^2 120° \sin^2 x \end{aligned}$$

$$= \cos^2 x + \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{3}{2}\sin^2 x = \frac{3}{2}(\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{3}{2}.$$

Finalement,

$$\overline{QA}^4 + \overline{QB}^4 + \overline{QC}^4 = 3(R^2 + R'^2)^2 + 6R^2R'^2,$$

ce qui démontre le théorème.

Nota. — Cette question a été résolue par MM. Ignacio Beyens à Cadix; H. Galopeau, élève au lycée d'Angoulême et E. Quintard suppléant au collège Chaptal. MM. Boutin, professeur au collège de Courdemanche; Troille, élève en mathématiques spéciales au lycée de Grenoble; L. Merante, à Catanzaro, l'ont résolue et généralisée, en remplaçant les deux triangles équilatéraux par deux polygones réguliers de même nom. M. Troille déduit de cette généralisation divers corollaires intéressants.

QUESTIONS PROPOSÉES

281. — On donne un angle. Par le sommet de cet angle, on fait passer une circonférence quelconque et l'on joint par une droite les points où elle rencontre les côtés de l'angle. Le diamètre parallèle à cette droite coupe la circonférence en deux points dont on demande le lieu lorsqu'on fait varier cette courbe.

(Mannheim.)

282. — Étant donnés deux triangles quelconques ABC, A'B'C', on construit, sur une même base MN, d'abord les couples de triangles MNP, MNP' semblables a ABC, A'B'C'; ensuite les couples MNQ, MNQ' semblables à BCA, B'C'A'; enfin les couples MNR, MNR' semblables à CAB, C'A'B'. Démontrer que les droites PP', QQ', RR' sont inversement proportionnelles aux produits AB.A'B', BC.B'C', CA.C'A'.

(J. Neuberg.)

ERRATUM DE LA QUESTION 279

Au 1°, *lire* 1 *au lieu de* o.

Au 3°, *lire :*

$$\Sigma \cos 3A \cos^3 (B - C) - 3 \cos (A - B) \cos (B - C) \cos (C - A) + \cos 3A \cos 3B \cos 3C + 1 = 0.$$

Aux 7° et 8°, *lire* cot *au lieu de* cos.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 8378-4-8.

CARACTÈRE DE DIVISIBILITÉ D'UN NOMBRE

PAR UN NOMBRE PREMIER QUELCONQUE (*)

(7, 11, 13, 17, 19, 23, 31...)

Par M. **Loir,** doyen honoraire de la Faculté des sciences de Lyon,

et M. **Loir,** lieutenant de vaisseau.

Soit N le nombre à diviser, dont le chiffre des unités est a, P étant le nombre premier.

Du nombre $\frac{N - a}{10}$, formé des dizaines du nombre N, on retranche le produit du chiffre a par le nombre $\frac{mP - 1}{10}$, formé des dizaines d'un des multiples de P, dont le chiffre des unités est égal à 1.

L'expression générale de cette différence sera :

$$D = \frac{N - a}{10} - a\frac{mP - 1}{10}.$$

On effectue les mêmes opérations sur la suite des différence successives, D′, D″...D_n que l'on obtiendra ainsi, jusqu'à ce que l'on ait épuisé le nombre N. Si l'on trouve qu'une des différences soit divisible par P, ou bien que la dernière soit égale à P, ou égale à zéro, le nombre N sera divisible par P. On désigne par a' le chiffre des unités de la première diffé rence D; a'' le chiffre des unités de la deuxième différence D′; ..., a_{n+1} le chiffre des unités de la n^{me} différence D_n.

(*) Quelques-uns des résultats contenus dans cette note ont été communiqués à l'Académie dés Sciences. (Voir *Comptes rendus*, séance du 9 avril dernier.)

Démonstration. — Si le nombre N est divisible par P, soit $N = Pd$, je dis que la différence $D = \frac{N - a}{10} - a\frac{mP - 1}{10}$ sera divisible par P :

En effet, en chassant le dénominateur, il viendra

$$10.D = N - a - amP + a = N - amP.$$

si on remplace N par sa valeur PD, on aura $10.D = P(d - am)$. Le produit $10 \times D$ est donc divisible par P, comme 10 est premier avec P, il faut que D soit divisible par P.

Il en sera de même de D' par rapport à D divisible par P, et ainsi de suite en descendant de N à D_n.

Réciproquement : si la différence $D = \frac{N - a}{10} - a\frac{mP - 1}{10}$ est divisible par P, je dis que le nombre N est aussi divisible par P; posons $D = P.q$, il viendra $\frac{N - a}{10} - a\frac{mP - 1}{10} = P.q$ en effectuant on aura $N = 10Pq + amP$.

Soit $N = P(10q + am)$. N est donc un multiple de P.

Il en sera de mêne de D par rapport à D', supposé divisible par P; et ainsi de suite en remontant de D à N.

Par conséquent, si l'on reconnait qu'une des différences obtenues, dans la série d'opérations successives, que nous avons indiquées, est divisible par le nombre premier P, il en résulte que la différence antérieure sera aussi divisible par P, et ainsi de suite : on arrivera au nombre N, qui sera divisible par P.

Pour rendre les calculs plus simples, on choisira le plus petit des multiples du nombre premier, ayant l'unité, pour chiffre de ses unités.

1° Si le nombre premier est terminé par 1, (11, 31, 41, ...), ce plus petit multiple sera ce nombre lui-même.

2° Si le nombre premier est terminé par 3, (13, 23, ...) ce plus petit multiple sera son produit par 7, (91, 161, ...);

3° Si le nombre premier est terminé par 7, (7, 17, 37, ...), ce plus petit multiple sera son produit par 3, (21, 51, ...);

4° Si le nombre premier est terminé par 9, (19, 29, ...), ce plus petit multiple sera son produit par 9, (171, 261, ...).

Alors les expressions des différences, obtenues comme nous l'avons indiqué, deviendront pour les divers nombres premiers

Pour le nombre premier

$\frac{D-a'}{10} - 2a'$,	$\frac{D'-a''}{10} - 2a''$	7	$\frac{N-a}{10} - 2.a$
$\frac{D-a'}{10} - a'$,	. . . . . .	11	$\frac{N-a}{10} - a$
$\frac{D-a'}{10} - 9a'$,	. . . . . .	13	$\frac{N-a}{10} - 9.a$
. . . . . .	. . . .	17	$\frac{N-a}{10} - 5.a$
. . . . . .	. . . .	19	$\frac{N-a}{10} - 17.a$
. . . . . .	. . . .	23	$\frac{N-a}{10} - 16.a$
. . . . . .	. . . .		. . . . . .
. . . . . .	. . . .	31	$\frac{N-a}{10} - 3.a$
. . . . . .	. . . .		. . . . . .
. . . . . .	. . . .	41	$\frac{N-a}{10} - 4.a$
. . . . . .	. . . .		. . . . . .
. . . . . .	. . . .	61	$\frac{N-a}{10} - 6.a$
. . . . . .	. . . .		. . . . . .

Règle générale. — Pour savoir si un nombre est divisible par un nombre premier, 17 par exemple, on supprime le chiffre de ses unités, on retranche du nombre ainsi obtenu, cinq fois le chiffre des unités du nombre donné; on opère de même sur cette différence, ainsi que sur les différences semblables successives, que l'on obtiendrait jusqu'à l'épuisement du nombre donné; si la dernière des différences est égale à un multiple de 17, ou bien si elle est égale à zéro, le nombre donné sera divisible par le nombre premier 17.

Applications au nombre 230529299.

P = 7	P = 13	P = 17	P = 31
$\frac{N-a}{10}-2.a$	$\frac{N-a}{10}-9.a$	$\frac{N-a}{10}-5.a$	$\frac{N-a}{10}-3.a$
$23052929\bar{9}$	$23052929\bar{9}$	$23052929\bar{9}$	$23052929\bar{9}$
— 18	— 81	— 45	— 27
.....$91\bar{1}$	....$284\bar{8}$	$2305288\bar{4}$	$2305290\bar{2}$
— 2	— 72	— 20	6
....$28\bar{9}$	...$521\bar{2}$	$230526\bar{8}$	$230528\bar{4}$
— 18	— 18	— 40	— 12
$35051\bar{0}$	$23050\bar{3}$	$23048\bar{6}$	$23051\bar{6}$
— 2	— 27	— 30	— 18
$23c\bar{3}$	$2302\bar{3}$	$2301\bar{8}$	$2303\bar{3}$
— 6	— 27	— 40	— 9
$22\bar{4}$	$227\bar{5}$	$226\bar{1}$	$229\bar{4}$
— 8	— 45	— 5	— 12
14	$18\bar{2}$	$22\bar{1}$	$21\bar{7}$
	— 18	— 5	— 21
	0	17	0

Le nombre donné 230529299 est donc divisible par les nombres premiers 7, 13, 17, 31.

Nota. — Le trait placé au-dessus du chiffre des unités des différences successives contenues dans ce tableau et les suivants signifie que ce chiffre doit être supprimé.

Autre application au nombre 9451701259.

P = 7	P = 23	P = 41
$\frac{N-a}{10}-2.a$	$\frac{N-a}{10}-16.a$	$\frac{N-a}{10}-4.a$
$945170125\bar{9}$	$945170125\bar{9}$	$945170125\bar{9}$
— 18	— 144	— 36
....$7010\bar{7}$	....$6998\bar{1}$	....$7008\bar{9}$
— 14	— 16	— 36
....$699\bar{6}$	....$698\bar{2}$	....$697\bar{2}$
— 12	— 32	— 8
....$68\bar{7}$	...$166\bar{6}$	....$68\bar{9}$
— 14	— 96	— 36
...$15\bar{4}$	.45070	..$513\bar{2}$
— 8	— 112	— 8
..$50\bar{7}$	$933\bar{8}$	..$50\bar{5}$
— 14	— 128	— 20
.$43\bar{6}$	$80\bar{5}$	$943\bar{0}$
— 12	— 80	— 12
$93\bar{1}$	0	$8\bar{2}$
— 2		— 8
$9\bar{1}$		0
— 2		

Le nombre 9451701259 est donc divisible par 7, 23, 41

Quotient. — Pour avoir le quotient du nombre N par P, nous remarquerons que, pour le nombre N, la différence D donnera $N - amP = 10D$.

Que pour le nombre D, la différence D′ donnera $D - a'mP = 10D'$. De même, pour D′, on aura $D' - a''mP = 10D''$; et ainsi de suite jusqu'à la dernière différence, la n^{me}, qui sera un multiple de P, $(D_n = 10KP)$.

On multipliera la deuxième de ces égalités par 10,

$10D - 10a'mP = 100D'$, la troisième par 100,

$100D' - 100a'mP = 1000D''$, la quatrième par 1000,

$1000D'' - 1000a''mP = 10000D'''$;

et ainsi de suite. Pour la dernière D_n, on aura à multiplier par 10^{n-1} il viendra $10D_n = 10^nKP$.

Si l'on effectue la somme de ces équations, et qu'on opère les réductions on a :

$N - amP - a'mP.10 - a''mP.100 - a'''mP1000 - \ldots = PK10^n$

d'où

$$\frac{N}{P} = m(a + 10a' + 100a'' + 1000a''' + \ldots) + 10^nK$$

Si le nombre premier est terminé par le chiffre 1, alors $m = 1$, on a

$$\frac{N}{P} = a + 10a' + 100a'' + 1000a''' + \ldots + K10^n$$

par le chiffre 3, alors $m = 7$, on a :

$$\frac{N}{P} = 7(a + 10a' + 100a'' + \ldots) + K10^n$$

par le chiffre 7, alors $m = 3$, on a :

$$\frac{N}{P} = 3(a + 10a' + 100a'' + \ldots) + K10^n$$

par le chiffre 9 alors $m = 9$, on a :

$$\frac{N}{P} = 9(a + 10a' + 100a'' + \ldots) + K10^n.$$

Applications au nombre 230529299, données plus haut, nous avons eu, pour ces divisions :

	Par 7.		Par 13.		Par 31.	
a	9	27	9	63	9	9
a'	1	30	8	560	2	20
a''	9	2700	2	1400	4	400
a'''	0	...	3	21000	6	6000
a^{IV}	1	30000	3	210000	3	30000
a^{V}	3	900000	5	3500000	4	400000
		12000000	2	14000000	7	70000000
	2	20000000	0		0	
Quotients		32932757		17733023		7436429

Remarque. — La méthode que nous venons d'indiquer peut, évidemment, être appliquée pour reconnaître si un nombre est divisible par le produit de plusieurs nombres premiers, et aussi à la divisibilité d'un nombre, par un nombre impair, non terminé par un nombre 5.

Dans le cas d'une division exacte, elle permettra d'obtenir le quotient d'un nombre par un nombre impair, non terminé par un 5.

Exemple ; 230529299 est-il divisible par le produit

$$7 \times 11 \times 13 = 1001.$$

$$\frac{N-a}{10} - 100a$$

	Quotient
$23052929\overline{9}$	9
$...5202\overline{9}$	90
$230430\overline{2}$	200
$2302\overline{30}$	30000
$200\overline{2}$	200000
0	230299

Autre application: le nombre 9451701259 est-il divisible par 323323. Le plus petit multiple du diviseur, ayant pour chiffre de ses unités le nombre un, sera

$$323323 \times 7 = 2263261.$$

alors la formule générale de la différence sera

$$\frac{N-a}{10} - 226326.a, \ K = 226326$$

		Quotient
$945170125\bar{9}$		63
2036934	$= 9.\,K.$	70
$94313319\bar{1}$		2100
226326	$= K.$	7000
$9408699\bar{3}$		20000
678978	$= 3.\,K.$	29133
$872972\bar{1}$		
226326	$= K.$	
646646		

ce nombre étant double du diviseur donné, le nombre 9451701259 sera divisible par 323323.

Si le dividende est terminé par des zéros, on opérera comme d'ordinaire, sur la partie du dividende formée des chiffres significatifs, et l'on ajoutera au quotient autant de zéros, qu'il y en avait dans le dividende.

Mais on pourra, par notre procédé, opérer sur le nombre proposé, auquel on aura ajouté, une fois, deux fois..., cinq fois le diviseur; alors du quotient que l'on obtiendra, on n'aura qu'à retrancher une, deux,... cinq unités.

Soit à diviser 115900 par 19.

On prendra $115900 + 5.19 = 115995.$

$$\frac{N - a}{10} - 17a.$$

	Quotient	
$11599\bar{3}$	$5 \times 9 = 45$	
$1151\bar{4}$	$40 \times 9 = 360$	$6105 - 5 = 6100,$
$108\bar{3}$	$300 \times 9 = 2700$	
$57 = 19.3$	3000	
	6105	

Observation. — Il est des cas, où l'on obtient un nombre négatif pour la première différence. Ainsi $779 : 19 = 41.$

La formule générale $\dfrac{N - a}{10} - a\,\dfrac{mP - 1}{10} = D$ conduit à l'équation $N - amP = 10.D.$ Si N est plus petit que le produit $a.\,m.\,P$, la différence D sera un nombre négatif. Pour

l'exemple donné : on a $N = 779$, et *a. m.* $P = 9 \times 19 \times 9 = 1539$.

Si cette différence négative est divisible par le diviseur, soit $-KP$, le nombre N sera aussi divisible par P.

Le multiple négatif $(-K)$ conduirait facilement à la détermination du quotient cherché.

Mais on arrivera, par un artifice général, à ce quotient. On multipliera le nombre N par 10, 100, 1000..., puis comme le nombre obtenu sera terminé par des zéros, on lui ajoutera une fois, ou deux, ou trois,... le diviseur; du quotient, qu'on obtiendra, on retranchera, une, deux, trois,... unités, puis on divisera par 10, 100, 1,000.

APPLICATIONS

Soit 665 à diviser par 19. Le procédé ordinaire de la division donne 35 pour quotient.

Prenons $66500 + 19 = 66519$.

Appliquons la méthode.

$$19 \times 9 = 171$$

$$\frac{N-a}{10} - 17d.$$

	Quotient
$6651\bar{9}$	81
$649\bar{8}$	720
$51\bar{3}$	2700
0	3501

$$\frac{3501 - 1}{100} = 35.$$

Si nous prenons

$$665000 + 19 = 665019$$

on aura :

	Quotient
$66501\bar{9}$	81
$6634\bar{8}$	720
$649\bar{8}$	7200
$51\bar{3}$	27000
0	35001

$$\frac{35001 - 1}{1000} = 35.$$

Soit $1159 : 19 = 61$.

Prenons $1159 \times 100 + 5 \times 19 = 115995$

on aura :

$11599\bar{5}$	45
$1151\bar{4}$	360
$108\bar{3}$	2700
$57 = 19.3$	3000
	6105

$$\frac{6105 - 5}{100} = 61.$$

La méthode, que nous venons d'indiquer, correspondra donc à un nouveau procédé de la division exacte d'un nombre par un nombre quelconque. Car, si le diviseur contient les facteurs 2^x et 5^y, puisque la division est exacte, le dividende devra contenir ces mêmes facteurs, à une puissance au moins égale. Si on divise le dividende et le diviseur par le produit $2^x . 5^y$, le quotient ne sera pas changé, et le nouveau diviseur sera un nombre impair, non terminé par un 5.

Conclusion. — D'après ce que nous venons de développer, on peut déduire un procédé unique pour reconnaître si un nombre est divisible séparément, ou à la fois, par les nombres premiers 7, 11 et 13 ; et obtenir les divers quotients.

Pour cela, nous appliquerons notre méthode à la division d'un nombre N par le produit $7 \times 11 \times 13 = 1001$. Nous savons que l'on a pour l'expression générale des différences successives, que l'on obtient : $D = \frac{N - a}{10} - 100.a$. Nous serons conduits à la règle suivante.

Règle. — Pour connaître, si un nombre N est divisible par 7, par 11, par 13 ou leurs produits; et déterminer les divers quotients.

Du nombre donné, on supprime le chiffre des unités; du nombre, ainsi obtenu, on retranche autant de centaines qu'il y a d'unités dans le chiffre supprimé.

De cette première différence on supprime le chiffre des unités ; du nombre ainsi obtenu, on retranche autant de centaines qu'il y a d'unités dans le nouveau chiffre supprimé.

Et ainsi de suite : Si la différence à laquelle on s'arrête est divisible par 7, par 11, par 13, le nombre donné sera divisible par 7, par 11, par 13. Si la dernière différence est égale à zéro, le nombre sera divisible par 7, 11, et 13.

Pour obtenir les quotients du nombre :

Par 7. — *On fera la somme des unités du nombre, plus le produit par* 10 *des unités de la première différence, plus le produit par* 100 *des unités de la deuxième différence, plus le produit par* 1000 *des unités de la troisième différence,... et ainsi de suite. On multipliera cette somme par le produit* $11 \times 13 = 143$. *Au nombre ainsi obtenu, on ajoutera le produit par* 10^n, *du multiple de* 7 *de la différence, de rang* n, *a laquelle on s'est arrêté.*

Par 11. — On opérera de la même manière; mais la somme devra être multipliée par $7 \times 13 = 91$.

Par 13. — On opérera de la même manière; mais la somme devra être multipliée par $7 \times 11 = 77$.

Par 7×11. — On opérera de la même manière; mais la somme devra être multipliée par 13.

Par 7×13. — On opérera de la même manière; mais la somme devra être multipliée par 11.

Par 11×13. — On opérera de la même manière, mais la somme devra être multipliée par 7.

Par $7 \times 11 \times 13$. — On opérera de la même manière; la somme ne devant être multipliée par aucun facteur.

Application au nombre 1340955.

1340955
133595
12859
$385 = 7 \times 11 \times 5$

Le nombre est donc divisible par 7, par 11.

somme : $5 + 50 + 900 = 955$

Quotients :

Par 7...... $955 \times 143 + 55000 = 191565$
Par 11..... $955 \times 91 + 35000 = 121005$.
Par 7×11. $955 \times 13 + 5000 = 17415$.

UN CHAPITRE D'ARITHMÉTIQUE

NOMBRES INCOMMENSURABLES
LIMITES — MESURE DES GRANDEURS — RAPPORTS

Par M. **J. Griess**, professeur du cours préparatoire à Saint-Cyr, au Lycée d'Alger.

(*Suite*, v. p. 97).

MESURE DES GRANDEURS

14. — Mesurer une grandeur, c'est la comparer à une autre grandeur de même espèce, prise pour unité. Supposons, par exemple, que la grandeur à mesurer soit la longueur d'une droite A et que B soit la longueur prise pour unité.

Si A contient B m fois (m étant entier), la mesure de A est le nombre entier m.

Si A ne contient pas B un nombre exact de fois, elle peut contenir un nombre exact de parties aliquotes de B; si elle contient m fois la $p^{\text{ième}}$ partie de B, la mesure de A est la fraction $\frac{m}{p}$.

Enfin, il peut arriver que A ne contienne un nombre exact de fois, ni B, ni aucune des parties aliquotes de B. On dit alors que les grandeurs A et B sont incommensurables entre elles.

Partageons B en n parties égales et supposons que A contienne m de ces parties et n'en contienne pas $m + 1$; les fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ mesureront deux longueurs, l'une inférieure, l'autre supérieure à A; elles sont dites des mesures approchées de A, l'une par défaut, l'autre par excès; comme chacune de ces longueurs diffère de A de moins de $\frac{1}{n}$ B, on dit que $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ sont les mesures approchées de A, à moins de $\frac{1}{n}$ près.

15. Théorème. — *En prenant pour unité une certaine grandeur* B *et donnant à* n *la série des valeurs entières, les mesures approchées de* A *à moins de* $\frac{1}{n}$ *près par défaut et par excès sont deux suites de valeurs qui définissent le même nombre incommensurable; ce nombre est dit, par définition, la mesure de* A.

En effet, soient

(1) $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots a_{n+p}, \ldots;$

(2) $a'_1, a'_2, \ldots a'_n, \ldots a'_{n+p}, \ldots;$

les deux suites formées par les valeurs approchées de A, les premières par défaut, les secondes par excès.

Ces deux suites sont telles que tout nombre de la première suite est plus petit que tout nombre de la seconde, puisque tous les nombres de la première suite mesurent des grandeurs inférieures à A, et tous ceux de la seconde des grandeurs supérieures à A. De plus, la différence entre deux nombres de même rang est

$$a'_n - a_n = \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n} = \frac{1}{n};$$

elle tend vers zéro quand n croît indéfiniment; donc (13), ces deux suites définissent le même nombre incommensurable.

16. Corollaire. — *Un nombre incommensurable est donc défini par la suite de ses valeurs approchées, à moins de* $\frac{1}{n}$ *près. Il en résulte que si les valeurs approchées de deux nombres incommensurables, à moins de* $\frac{1}{n}$ *près, sont égales, quel que soit* n, *ces deux nombres sont égaux.*

17. Remarque. — Ce n'est pas ordinairement par des suites convergentes que s'introduisent en Mathématiques les nombres incommensurables. Par exemple, le nombre π se définit comme représentant le rapport de la circonférence au diamètre; cette définition permet de calculer autant de décimales de π que l'on veut, et de former ainsi la suite convergente qui sert à définir les opérations que l'on peut faire avec cette transcendante. *(A suivre.)*

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 108.)

---

73. Les solutions par la transformation réciproque. — Voici le principe de la transformation que nous allons considérer (*).

Soit OX une droite tracée dans la région accessible; on prend, sur OX, un point O. Soit OA′ la ligne de visée perpendiculaire à celle qui va, de O, au point inaccessible A. On voit que si A′ correspond à A, réciproquement, A correspond à A′; pour ce motif, nous dirons que A et A′ sont deux points réciproques. La ligne OA′, dont il est ici question, se détermine d'ailleurs sans difficulté puisqu'elle est *en retour d'équerre*, relativement à OA. On fixe alors un piquet au point où A se projette sur OX, et l'on jalonne le prolongement de la ligne AH. Au point A, considéré dans la région inaccessible, correspond ainsi un point A′, situé, au contraire, sur le terrain où l'on peut opérer. Dans ces conditions, à une figure F, constituée par un certain nombre de points A, B, C... correspond une figure *f*, placée dans la partie

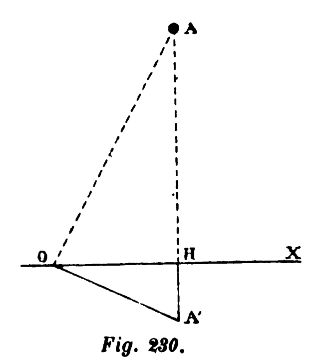


Fig. 230.

(*) La transformation que nous utilisons ici est un cas particulier de celle que nous avons exposée autrefois, sous ce nom (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1882, p. 49). Dans le cas présent, nous rejetons à l'infini l'un des pôles fixes constituant la figure de référence.

accessible. D'une façon générale, on comprend comment; des mesures effectuées sur cette dernière figure, on peut déduire les longueurs de certaines droites de la figure inaccessible F.

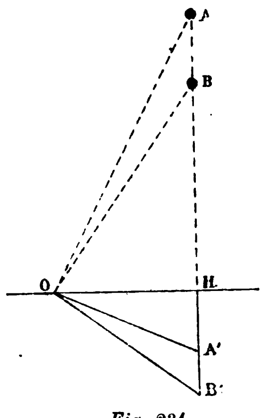


Fig. 231.

Appliquons cette idée à la détermination de la distance de deux points inaccessibles, A, B.

Première solution. — Jalonnons, dans la partie accessible, une droite OX perpendiculaire à AB; soient A', B' les points qui correspondent aux points visibles, mais inaccessibles, A, B.

Nous pouvons écrire :

$$\frac{\overline{OH}^2}{HA'} = HA, \quad \frac{\overline{OH}^2}{HB'} = HB.$$

Par conséquent,

$$\overline{OH}^2\left(\frac{1}{HA'} - \frac{1}{HB'}\right) = AB.$$

Cette formule permet de calculer AB.

Pour rendre la solution plus pratique, on observera que, OH étant arbitraire, on pourra prendre, suivant les cas, OH = 10ᵐ, OH = 100ᵐ, etc... Par exemple, pour des distances peu considérables, on donnera à OH la longueur 10, et l'on aura

$$\frac{AB}{100} = \frac{1}{A'H} - \frac{1}{B'H}.$$

En se servant de la table des inverses, une simple soustraction donnera $\frac{AB}{100}$; et, par suite, AB.

Fig. 232

Deuxième solution. — Voici une autre solution, de même nature que la précédente.

Prenons *(fig. 232)* une droite quelconque OX dans la région

accessible; soient A′, B′ les réciproques de A, B, par rapport à Δ. La distance inconnue AB se calculera par la formule

$$AB = HH'\frac{OA'}{HA'},$$

laquelle résulte immédiatement de la similitude des triangles BAH, OA′H.

Troisième Solution. — Voici, toujours dans le même ordre d'idées, une troisième solution qui conviendrait assez bien au cas où les points A et B seraient très éloignés de la base des opérations, la distance AB étant relativement petite.

Ayant choisi un point O dans la partie accessible, jalonnons les droites OX′, O respectivement perpendiculaires à OA et OB; puis, prenons les points A′, B′ réciproques de A, B, relativement à OX et à OX′. On a

$$OB = OB'\frac{OH}{HA'}, \quad \text{et } AH = \frac{\overline{OH}^2}{HA'}$$

d'où

$$BL = OB - AH = \frac{OH}{HA'}(OB' - OH)$$

Fig. 233.

Ayant calculé BL, par cette formule, on observe que AB est l'hypoténuse d'un triangle ABL dont les côtés de l'angle droit (AL = OH et BL) sont connus.

Remarque. — Aucune des solutions précédentes ne résout complètement la question posée, parce qu'elles sont soumises, plus ou moins, à des exigences matérielles pouvant, dans la pratique, soulever certaines difficultés. L'idée des points réciproques permet pourtant de présenter une solution générale en prenant deux axes OX OX′, quelconques, mais suffisamment rapprochés des perpendiculaires élevées aux droites OA, OB, pour que les constructions puissent être effectuées dans une région déterminée, voisine de O. Nous ne développerons pas cette solution; elle conduit, en effet, à une formule offrant une certaine complication; d'ailleurs, nous aurons occasion, un peu plus loin, de présenter une solution générale, beaucoup plus simple.

Mais, avant de faire connaître cette méthode, nous exposerons les solutions principales qui ont été proposées pour le problème actuel.

74. La solution de Mascheroni. Des vingt solutions que propose Macheroni (*loc. cit.*, p. 18) pour déterminer la distance d'un segment entièrement inaccessible AB, aucune ne présente un caractère vraiment pratique. Ou bien, elles exigent des conditions, rarement acceptables (par exemple, de voir le segment sous un angle droit, de certains points de la région accessible); ou bien, elles conduisent à des formules trigonométriques ou algébriques, compliquées, nécessitant, par exemple, l'extraction d'une racine carrée; opération arithmétique qu'on doit éviter, s'il est possible.

Nous ferons simplement connaître l'idée que Mascheroni a exploitée dans ces diverses solutions; celles-ci peuvent se résumer de la manière suivante.

Imaginons qu'on vise les points inaccessibles A, B, en se plaçant successivement aux points C, D, arbitrairement choisis dans la région accessible. Traçons alors, par le point C, la transversale PQ; le théorème de Ménélaüs, appliqué au triangle PMC et à la transversale NQB, permettra de calculer BC, par la formule

$$\frac{BC + CM}{BC} = \frac{QP}{QC} \cdot \frac{NM}{NP},$$

de laquelle on tire

$$BC = \frac{CM.QC.PN}{QP.MN - QC.NP}.$$

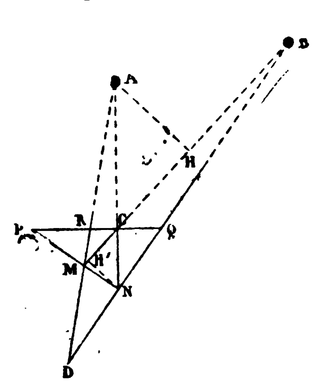


Fig. 234.

De même, le triangle PCN et la transversale MRA donnent

$$AC = \frac{PM.RC.CN}{MN.RP - PM.RC}.$$

Ainsi, dans le triangle BAC, on connaît deux côtés CA, CB et l'angle compris ACB ; de ces données, on peut déduire le côté AB.

On peut éviter l'emploi de la Trigonométrie en observant

que les deux triangles ACB, MCN ont un angle égal; on a donc

$$\overline{AB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 - 2CB.CH,$$
$$\overline{MN}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{CN}^2 - 2MC.CH' ;$$

avec l'égalité
$$\frac{CH}{CH'} = \frac{AC}{CN}.$$

Ces relations donnent

$$(1) \qquad \frac{\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 - \overline{AB}^2}{\overline{MC}^2 + \overline{CN}^2 - \overline{MN}^2} = \frac{CB.AC}{CM.CN}.$$

On calcule CA et CB par les formules établies tout à l'heure; les longueurs MC, MN, CN sont relevées directement par le chaînage, et l'on calcule AB au moyen de l'égalité (1). Mais on voit combien cette solution, même simplifiée par certaines dispositions particulières de la figure, est peu pratique ; il est vrai qu'elle n'exige aucun instrument; mais seulement quelques jalons et un cordeau divisé.

75. La première solution de Servois. — Cette solution, comme la précédente, dont elle diffère peu d'ailleurs, n'exige que des alignements; malheureusement, comme celle-ci ,elle conduit à une formule peu commode.

De deux points C, O, pris dans la région accessible, on dirige, comme tout-à-l'heure, des lignes de visée, vers les points A, B. On prend ensuite, sur CO, arbitrairement, un point U; les lignes de visée UA, UB, déterminent les points P, Q. Les triangles ADB, MDN ont un angle égal; comme nous l'avons expliqué au paragraphe précédent, nous pourrons calculer AB, si nous connaissons les distances OA et OB.

Fig. 235.

C'est, comme on voit, le principe de la méthode de Mascheroni, principe dont le but est de ramener la recherche de la distance de deux points inaccessibles, à la détermination,

plus simple, et précédemment résolue, de la longueur d'un segment dont une extrémité seulement est inaccessible. Mais la détermination des longueurs OA, OB se fait plus simplement, dans le tracé imaginé par Servois; voici pourquoi.

Prolongeons OC jusqu'à sa rencontre en K avec AB; dans le quadrilatère complet ACBMON, la diagonale CO est partagée harmoniquement aux points U et K; par suite, les ponctuelles OPMA, OQNB sont harmoniques. Donc,

$$\frac{2}{ON} = \frac{1}{OQ} + \frac{1}{OB}, \qquad \frac{2}{OM} = \frac{1}{OP} + \frac{1}{OA}.$$

Telles sont les formules qui permettent de calculer assez rapidement, si l'on fait usage de la table des inverses, les distances OA et OB et, par suite, AB. Néanmoins, la méthode de Servois, tout en perfectionnant un peu celle de Mascheroni, laisse encore beaucoup à désirer, au point de vue pratique.

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur au collège de Courdemanche.

(*Suite et fin*, voir p. 117.)

---

70. — Trouver n nombres en progression arithmétique connaissant leur somme ns et la somme b^2 de leurs produits deux à deux. Distinguer les deux cas : n pair, n impair.

1° n impair $= 2m + 1$.

Soient

$$a - mr, \quad a + mr, \quad a - (m-1)r, \quad \ldots \quad a + r, \quad a,$$

les $2m+1$ termes.

On en déduit, tout de suite,

$$a = S;$$

Puis

$$\sum_{K=-m,\ K'=-m}^{K=m,\ K'=m} (a + Kr)(a + K'r) = b^2.$$

Dans cette seconde équation, on a écarté l'hypothèse $K = K'$.

Le développement de cette équation montre que le coefficient de a^2 est le nombre des combinaisons de $2m+1$ objets deux à deux, ou $m(2m+1)$;

le coefficient du terme en r est nul, celui de r^2 est négatif et sa valeur absolue est la somme des carrés des m premiers nombres entiers. L'équation qui donne r est donc

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}r^2 - m(2m+1)s^2 + b^2 = 0$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{6[m(2m+1)s^2 - b^2]}{m(m+1)(2m+1)}}.$$

2° m pair $= 2m$.

Désignons la raison par $2r$, et soient

$$a-r,\ a+r,\ a-2r,\ a+2r,\ \ldots\ a-(2m-1)r,\ a+(2m-1)r$$

les termes de la progression. On a toujours $a = s$

et $\Sigma_{K=-m+1, K'=-m}^{K=m, K'=m}[a-(2K-1)r][a+(2K'-1)r] = b^2$

où, toujours, on excepte l'hypothèse $K = K'$.

On trouve que le coefficient de a^2 est $m(2m-1)$, celui de ar est nul, celui de r^2 est négatif et a pour valeur absolue la sommé des carrés des m premiers nombres impairs. L'équation qui donne r est donc

$$m(2m-1)s^2 - \frac{m(4m^2-1)}{3}r^2 = b^2,$$

d'où

$$r = +\sqrt{\frac{3[m(2m-1)s^2 - b^2]}{m(4m^2-1)}}.$$

71. — Trouver n nombres en progression arithmétique, connaissant leur somme ns et la somme b^3 de leurs cubes. Cas où n est pair; cas où n est impair.

Conservons les notations précédentes

1° *n impair* $= 2m + 1$. On a.

$$\sum_{k=-m}^{k=m}(a+kr)^3 = b^3$$

Les termes en r et r^3 disparaissent et l'on trouve

$$r = \pm\sqrt{\frac{b^3-(2m+1)s^3}{m(m+1)(2m+1)s}}.$$

2° *n pair* $= 2m$. La seconde équation est alors

$$\sum_{k=-m+1}^{k=m}[a-(2k-1)r]^3 = b^3.$$

Les termes en r et r^3 disparaissent encore et l'on a

$$r = \pm\sqrt{\frac{b^3-2ms^3}{2m(4m^2-1)s}}.$$

72. — Trouver n nombres en progression arithmétique, connaissant leur somme ns et la somme b^4 de leurs quatrièmes puissances. Cas où n est pair; cas où n est impair.

1° *n impair*. L'équation

$$\sum_{k=-m}^{k=m}(a+kr)^4=b^4,$$

donne $$(2m+1)a^4+12a^2r^2\sum k^2+2r^4\sum k^4-b^4=0.$$

Mais on a $$\sum k^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6},$$

$$\sum k^4=\frac{m(m+1)(6m^3+9m^2+m-1)}{30};$$

finalement, on obtient l'équation bicarrée en r,

$$\frac{m(m+1)(6m^3+9m^2+m-1)}{15}r^4+2m(2m+1)(m+1)a^2r^2$$
$$+(2m+1)a^4-b^4=0;$$

2° *n pair* $=2m$.

Un calcul analogue conduit à l'équation bicarrée :

$$\frac{2m(4m^2-1)(12m^2-7)}{15}r^4+4m(4m^2-1)a^2r^2+2ma^4-b^4=0.$$

73. — Trouver n nombres en progression arithmétique, connaissant leur somme ns et la somme b^5 de leurs cinquièmes puissances. Cas où n est impair, cas où n est pair.

1° n impair $=2m+1$. L'équation, dans ce cas, est

$$\sum_{k=-m}^{k=m}[a+kr]^5=b^5.$$

On constate encore que les termes en r, r^3, r^5, disparaissent, et il reste

$$(2m+1)a^5+20a^3r^2\sum_1^m k^2+10ar^4\sum_1^m k^4=b^5,$$

d'où, l'équation bicarrée :

$$\frac{m(m+1)(6m^3+9m^2+m-1)}{3}ar^4+\frac{10}{3}m(m+1)(2m+1)a^3r^2$$
$$+(2m+1)a^5-b^5=0.$$

2° n pair $=2m$,

$$\sum_{k=-m+1}^{k=m}[a+(2k-1)r]^5=b^5.$$

Les termes en r, r^3, r^5 disparaissent encore et l'on a, pour déterminer r, l'équation bicarrée :

$$\frac{2}{3}m(4m^2-1)(12m^2-7)ar^4+\frac{20}{3}m(4m^2-1)a^3r^2+2ma^5-b^5=0$$

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu de M. P. Mansion, l'éminent professeur à l'Université de Gand, la lettre suivante :

MONSIEUR ET CHER COLLÈGUE,

Il me semble que la démonstration du théorème II, page 88, dans l'article de M. Griess, est insuffisante. L'auteur dit : « Considérons la suite des valeurs que prend le nombre variable (constamment croissant par hypothèse), a_1, a_2, ..., a_n. Je dis que cette suite est convergente. D'abord $a_{n+1} - a_n$ tend vers zéro quand n croît indéfiniment. *S'il n'en était pas ainsi, on pourrait, en effet trouver un rang* n *tel qu'à partir de ce rang, la différence* $a_{n+1} - a_n$ *fût supérieure à un nombre positif* n. On aurait $a_{n+1} - a_n > h$, $a_{n+2} - a_{n+1} > h$, ... $a_{n+p} - a_{n+p-1} > h$ ». La phrase soulignée est une assertion qu'il faudrait prouver. On peut faire sur $a_{n+1} - a_n = \varphi(n)$ *trois* hypothèses : ou bien, lim $\varphi(n) = 0$; ou bien pour n suffisamment grand, $\varphi(n)$ reste supérieur à h, ou bien, $\varphi(n)$ oscille continuellement aux environs de zéro, sans avoir zéro pour limite, comme ce serait le cas, par exemple, si l'on avait

$$\varphi(n) = \sqrt{n} - \mathrm{E}\left(\sqrt{n}\right) + \frac{1}{n},$$

$\mathrm{E}(x)$ signifiant le plus grand entier contenu dans x. L'auteur montre que la deuxième hypothèse conduit à une absurdité et, de là, conclut que la première seule est admissible ; mais pour que cette conclusion fût rigoureuse, il faudrait avoir démontré aussi l'impossibilité de la troisième hypothèse. Dans la note qui termine le beau *Cours d'Analyse* de M. Jordan, n° 5, le savant Géomètre prouve, d'un seul coup, que la deuxième et la troisième hypothèse ne peuvent subsister que si la variable, toujours croissante, a une limite infinie.

Votre bien dévoué,

Le 19 mai 1888. P. MANSION.

BIBLIOGRAPHIE

Leçons résumées de géométrie descriptive, à l'usage des classes de mathé-mathiques élémentaires, par M. A. Morel. — Un volume de texte et un volume de planches imprimées en deux couleurs. Prix 3 fr. 50 c. — Paris, librairie Foucart (45, Boulevard Saint-Michel).

Dans ce petit ouvrage, l'auteur s'est attaché à établir d'abord les principes généraux sur lesquels s'appuient toutes les constructions que l'on doit faire en géométrie descriptive pour arriver à la solution graphique des divers problèmes compris dans les programmes d'admission au Baccalauréat et aux Ecoles du gouvernement (navale, militaire, forestière). Après les principes, viennent les méthodes générales que l'on emploie comme auxiliaires, et les principes sur les plans cotés.

Dans les principes sur la droite et le plan, l'auteur expose exclusivement les méthodes générales et laisse de coté tous les cas particuliers. Chaque problème contient une explication géométrique, puis l'indication de la solution graphique.

Après la représentation des polyèdres et l'examen de leurs sections planes, questions qui terminent la partie relative au Baccalauréat, on rencontre l'étude des surfaces élémentaires (cylindriques, coniques et de révolution) de leurs plans tangents et de leurs sections planes; puis, les problèmes de géométrie cotée, compris dans les programmes des Écoles.

Enfin, l'ouvrage se termine par des énoncés d'Exercices avec une indication rapide de la solution et, pour certains d'entre eux, le lecteur est renvoyé à des figures correspondantes, représentant l'épure complètement exécutée.

La disposition des planches, imprimées en deux couleurs, permet aux élèves de distinguer les constructions des données et celles des résultats; elle leur donnera l'habitude de l'exécution des épures, telle qu'on la demande aux examens.

Cette innovation nous paraît des plus heureuses et elle contribuera, pensons-nous, au succès d'un livre bien ordonné et clairement rédigé.

G. L.

QUESTION 220

Solution, par M. A. Boutin, professeur au Collège de Courdemanche.

Dans tout triangle on a :

1° $$\Sigma \frac{\cos B - \cos C}{p - a} = 0;$$

2° $$\Sigma (p - a)(b - c) \cos A = 0;$$

3° $(p-c)(b+c)\cos A + p(a-c)\cos B = (p-a)(a+b)\cos C$.
(G. L.)

1° L'identité à vérifier, en tenant compte de formules connues, devient successivement :

$$\Sigma \frac{\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C-B}{2}}{\sin B + \sin C - \sin A} = 0,$$

$$\Sigma \frac{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{C-B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \Sigma \frac{\sin\left(\frac{C-B}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \Sigma\left(\text{cotg}\frac{B}{2} - \text{cotg}\frac{C}{2}\right) = 0.$$

Cette dernière identité est manifeste

2° De même :

$$\Sigma\ \text{cotg}\frac{A}{2}(\sin B - \sin C)\cos A = 0,$$

$$\Sigma\,\text{cotg}\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos A = \Sigma\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}\cos A = 0,$$

$$\Sigma 2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}\cos A = \Sigma(\cos C - \cos B)\cos A = 0;$$

identité évidente.

3° On a :

$$p - a = r'\ \text{tg}\frac{C}{2}, \quad p = r'\ \text{cotg}\frac{B}{2}, \quad p - c = r'\ \text{tg}\frac{A}{2};$$

et l'identité à vérifier devient :

$$\text{tg}\frac{A}{2}(\sin B + \sin C)\cos A + \text{cotg}\frac{B}{2}(\sin A - \sin C)\cos B$$

$$= \text{tg}\frac{C}{2}(\sin A + \sin B)\cos C;$$

ou

$$\text{tg}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos A + \text{cotg}\frac{B}{2}\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{B}{2}\cos B,$$

$$= \text{tg}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cos C;$$

ou

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos A + \cos\frac{B}{2}\sin\frac{A-C}{2}\cos B.$$

$$= \sin\frac{C}{2} \cos\frac{A-B}{2} \cos C;$$

ou $$(\cos B + \cos C) \cos A + (\cos C - \cos A) \cos B$$
$$= (\cos A + \cos B) \cos C,$$

identité qui est encore manifeste.

Autre solution par M. Ignacio Beyens, capitaine du génie, à Cadix.

QUESTIONS PROPOSÉES

283. — Parmi tous les quadrilatères convexes, dont le périmètre et les angles sont donnés, quel est le plus grand en surface? *(Catalan.)*

284. — Sur les trois côtés d'un triangle équilatéral, on construit des triangles isoscèles. Étant donnés le périmètre et la surface de l'hexagone ainsi formé, calculer le côté du triangle équilatéral et montrer que les deux solutions ainsi obtenues n'en constituent au fond qu'une seule.

(Darboux.)

285. — On donne un angle droit de sommet O. On décrit une circonférence passant par O et l'on prend, sur cette courbe, un point M tel que les angles, compris entre les droites partant de ce point et aboutissant aux extrémités du diamètre qui contient O, aient pour bissectrices des parallèles aux côtés de l'angle donné. On demande le lieu de M, lorsqu'on fait varier la circonférence.

(Mannheim.)

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 10952-5-8.

UN CHAPITRE D'ARITHMÉTIQUE

NOMBRES INCOMMENSURABLES
LIMITES — MESURE DES GRANDEURS — RAPPORTS

Par M. **J. Griess**, professeur du cours préparatoire à Saint-Cyr, au Lycée d'Alger.

(*Suite et fin*, v. p. 131).

RAPPORTS

18. Définition. — On appelle rapport de deux grandeurs A, B, le nombre qui mesure A lorsqu'on prend B pour unité.

Un rapport peut donc être entier, fractionnaire, incommensurable.

19. Théorème. — *Deux grandeurs* A, B *étant mesurées au moyen d'une grandeur de même espèce* C, *prise pour unité et ayant pour mesures* α *et* β, *le rapport de* A *à* B *est égal au quotient* $\frac{\alpha}{\beta}$.

En d'autres termes, $\frac{A}{B} = \frac{A}{C} : \frac{B}{C}$.

1° Supposons α et β commensurables. Alors, on a, par exemple,

$$A = \frac{2}{11}C, \qquad B = \frac{3}{5}C;$$

donc

$$A = \frac{2}{11} \times \frac{5}{3} B.$$

Puis, par définition,

$$\frac{A}{B} = \frac{2}{11} \times \frac{5}{3} = \frac{\frac{2}{11}}{\frac{3}{5}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

2° Supposons α et β incommensurables. Soient

$$\begin{cases} a_1, & a_2, & \dots & a_n, & \dots, \\ a'_1, & a'_2, & \dots & a'_n, & \dots, \end{cases}$$

les deux suites de valeurs approchées de $\frac{A}{C}$

$$\begin{cases} b_1, & b_2, & \dots & b_n, & \dots, \\ b'_1, & b'_2, & \dots & b'_n, & \dots, \end{cases}$$

les deux suites de valeurs approchées de $\frac{B}{C}$.

Le quotient $\frac{\alpha}{\beta}$ sera la limite de l'un des quotients

$$\frac{a_n}{b_n}, \quad \frac{a_n}{b'_n}, \quad \frac{a'_n}{b_n}, \quad \frac{a'_n}{b'_n}$$

quand on fait croître n indéfiniment.

Le quotient $\frac{a_n}{b'_n}$ mesure une grandeur inférieure à A, en prenant pour unité une grandeur supérieure à B; il est donc plus petit que le rapport $\frac{A}{B}$. Le quotient $\frac{a'_n}{b_n}$ mesure une grandeur supérieure à A, en prenant pour unité une grandeur inférieure à B; il est plus grand que $\frac{A}{B}$.

$$\frac{a_n}{b'_n} < \frac{A}{B} < \frac{a'_n}{b_n}.$$

n croissant indéfiniment, le premier et le dernier membre ont pour limite $\frac{\alpha}{\beta}$; donc on a nécessairement

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

20. Corollaire. — *Les deux rapports $\frac{A}{B}$ et $\frac{B}{A}$ sont inverses l'un de l'autre.*

En effet, $\frac{A}{B}$ est défini par

$$\frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_2}{b_2}, \quad \dots \quad \frac{a_n}{b_n}, \quad \dots;$$

$\frac{B}{A}$, par $\frac{b_1}{a_1}$, $\frac{b_2}{a_2}$, ... $\frac{b_n}{a_n}$, ...;

leur produit $\frac{A}{B} \times \frac{B}{A}$,

est donc défini par

$$\frac{a_1}{b_1} \times \frac{b_1}{a_1} \quad \frac{a_2}{b_2} \times \frac{b_2}{a_2} \quad \dots \quad \frac{a_n}{b_n} \times \frac{b_n}{a_n} \quad \dots$$

ou 1, 1, ...

Il est donc égal à l'unité.

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 133.)

---

76. La seconde solution de Servois. — Vers la fin de son ouvrage, Servois, revenant sur le problème qui nous occupe, développe une solution de Mascheroni, à laquelle il apporte une modification importante.

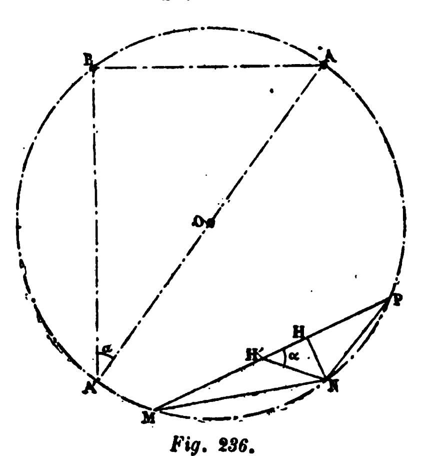


Fig. 236.

Cette solution de Mascheroni est une application du théorème bien connu : *dans tout triangle, le rectangle de deux côtés est équivalent au rectangle du diamètre du cercle circonscrit, par la hauteur qui correspond au troisième côté.*

En prenant cette propriété, pour base de sa construction,

Mascheroni supposait que, de trois points accessibles M, N, P, le segment inaccessible AB pouvait être vu sous un angle droit. En abaissant NH perpendiculaire sur MP, on a

$$AB = \frac{MN . NP}{NH}:$$

la longueur AB se trouve ainsi déterminée.

Mais cette solution rencontre, dans la pratique, des difficultés et il n'y aurait pas lieu de la signaler ici, sans le perfectionnement, très notable, que Servois lui a donné.

Comme l'observe Servois, il n'est pas nécessaire de supposer, pour appliquer le théorème cité, que les angles sous lesquels le segment inaccessible est vu des points M, N, P soient droits; il suffit qu'ils soient égaux, et que, α désignant leur valeur commune, on mène, du point N, sous l'angle α, une oblique NH' à la base MP.

En effet, soit A' le point diamétralement opposé à A. Les deux triangles A'AB, H'NH ssnt semblables et l'on a

$$\frac{AB}{AA'} = \frac{NH}{NH'}.$$

Mais

$$AA' = \frac{MN . NP}{NH}.$$

Donc, finalement,

$$AB = \frac{MN . NP}{NH'}.$$

Pour toutes ces constructions, une fausse équerre suffit; de plus, les tracés indiqués peuvent toujours être exécutés. En effet, α est quelconque, et MNP représente un triangle dont les dimensions peuvent être aussi petites que l'exigera le peu d'étendue du terrain accessible.

Tels sont, croyons-nous, les principaux procédés qui ont été proposés pour mesurer la distance de deux points inaccessibles.

Nous exposerons maintenant, pour ce même problème, plusieurs solutions qui nous paraissent plus pratiques.

77. Les solutions par la fausse équerre. — 1° Soit Δ

une parallèle menée à AB, dans la partie accessible. Prenons, sur Δ, un segment CD, arbitrairement, et jalonnons les lignes de visée CB, DA, de façon à obtenir le point O; si nous menons OI, parallèlement à CD, nous avons (*première partie*, § *14*).

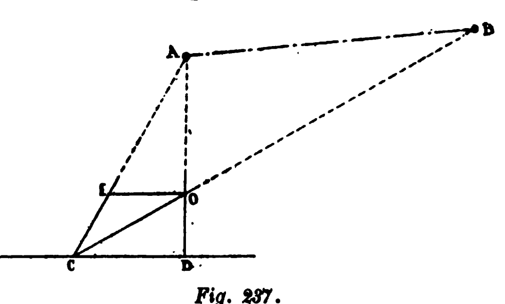


Fig. 237.

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{OI} - \frac{1}{CD}.$$

Le calcul de AB, au moyen de cette égalité, n'offre aucune difficulté; mais il se trouve encore abrégé, si l'on fait usage de la table des inverses.

2° La solution précédente est fort simple, en apparence; mais elle exige que l'on ait déterminé, dans la région accessible, une parallèle au segment inaccessible, opération toujours un peu longue; la solution que nous allons donner maintenant est plus directe; elle fait connaître, tout à la fois, la parallèle cherchée et la longueur du segment.

Prenons deux points arbitraires O, O′; puis effectuons les jalonnements qu'indique la figure 238, conformément à une construction précédemment donnée (§ 65). Nous avons démontré, au paragraphe cité, que PQ est parallèle à AB. On pourra donc appliquer à la figure ABPQ la construction indiquée tout à l'heure

Mais on peut aussi calculer AB, sans effectuer de nouveaux jalonnements, par une formule que nous allons établir. Les triangles semblables AOB, QO′P donnent

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AO}{QO'}.$$

D'ailleurs
$$\frac{AO}{OC'} = \frac{CO}{PO'}.$$

De ces égalités, en observant que OC = O′D, on déduit

$$AB = QP.\frac{CO'.O'D}{PO'.QO'}.$$

Cette formule permet de trouver BA, et la solution qu'on vient de lire peut être considérée comme générale, parce que le quadrilatère PQCD étant aussi petit que l'on voudra, les

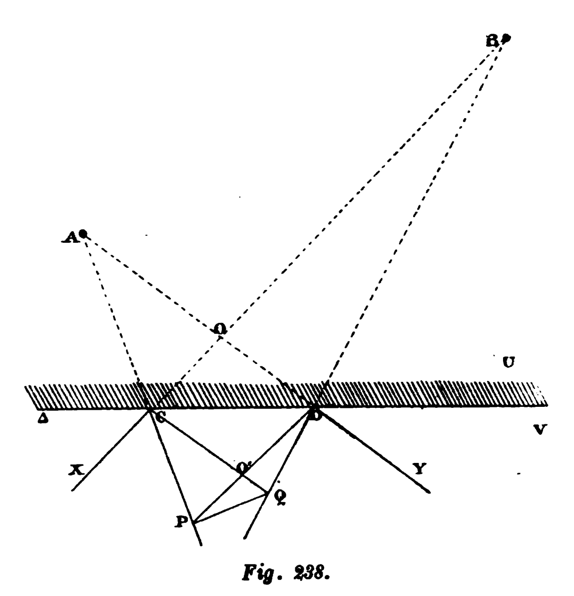


Fig. 238.

jalonnements nécessaires peuvent être effectués dans un espace donné, quelconque.

3° Parmi les solutions qui, dans le problème actuel, ressortent de l'emploi de la fausse équerre, nous citerons encore celle qui découle de la transformation par inversion.

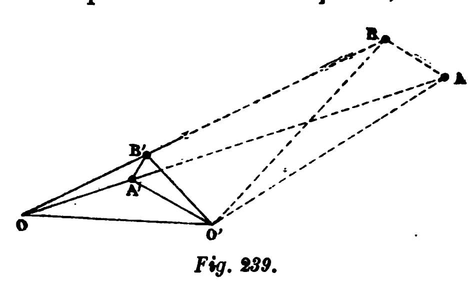


Fig. 239.

Prenons une base OO′ dans la région accessible et, avec la fausse équerre, relevons, en O′, l'angle OO′A. Ayant jalonné la partie accessible de OA, déterminons, sur cette droite le point A′ d'où l'on voit OO′ sous un angle OA′O égal à OO′A.

Les triangles semblables OA'O', OO'A donnent

(1) $$OA.O'A' = \overline{OO'}^2.$$

On trouvera, de même, sur la partie accessible de OB, un point B' tel que

(2) $$OB.O'B' = \overline{OO'}^2.$$

Les relations (1), (2) donnent

$$OA.O'A' = OB.O'B';$$

et cette dernière égalité prouve que les triangles ABO, B'A'O sont semblables. Nous avons donc

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OB'},$$

et, par suite, $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA.OA'}{OA'.OB'} = \frac{OO'^2}{OA'.OB'}.$$

Ainsi, la longueur inaccessible AB pourra se calculer par la formule

$$AB = A'B'\frac{OO'^2}{OA'.OB'}.$$

On observera, d'ailleurs, qu'en prenant pour base une droite OO', suffisamment courte, les longueurs OA', OB' seront aussi petites que l'on voudra; les jalonnements qu'il faudra faire, pour mesurer les distances qui entrent dans l'expression de AB, seront donc aussi restreints que l'exigera l'espace accessible.

78. Solution par l'équerre ordinaire. — Parmi les solutions très nombreuses, qu'on peut appliquer au problème actuel, en utilisant l'équerre ordinaire, nous exposerons seulement la suivante, d'une simplicité remarquable.

Imaginons deux pôles fixes O, O'; à un point M, pris dans la figure inaccessible, faisons correspondre un autre point μ, en élevant μO, μO' respectivement perpendiculaires à MO, MO'. Si le point μ se trouve placé dans la région accessible, on pourra, par ce procédé, base d'une transformation quadratique et réci-

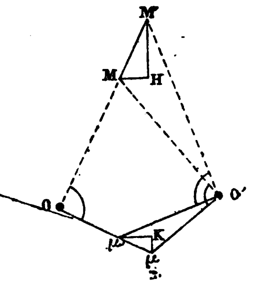


Fig. 240.

proque, construire une figure accessible; puis, des mesures effectuées sur celle-ci, déduire les dimensions des lignes inaccessibles considérées. Cette correspondance des points M, μ, il est bon de l'observer, offre bien le caractère pratique indispensable aux constructions que l'on doit exécuter sur le terrain. En effet, après avoir fixé deux jalons en ω, ω' sur les directions $O\mu$, $O'\mu$, il suffit, pour déterminer la position de μ, de planter un troisième jalon en ligne droite avec : O, ω, d'une part; O', ω', d'autre part. Or, tout cela constitue une opération des plus simples; la transformation en question peut, par conséquent, donner lieu à de nombreuses applications, dans la géométrie pratique. Nous aurons occasion de l'utiliser plus loin (chap. XII) à propos de la détermination de la base d'essai pour la mesure de la vitesse des bâtiments; pour le moment, voici comment elle permet de résoudre le problème qui nous occupe.

Nous supposons, pour signaler le cas où la méthode actuelle s'applique avec le plus de succès, que le prolongement du segment MM' considéré, pénètre dans la partie accessible. Nous prenons alors, pour pôles de transformation, un point O de ce prolongement, et un autre point, arbitraire, O'.

On observera que, dans cette transformation des figures, les projections des points correspondants M, μ sur la ligne des pôles OO' forment, avec ces points, une ponctuelle isotomique. En effet, le quadrilatère $OM\mu O'$ est inscriptible à une circonférence ayant pour centre le milieu de $M\mu$; par suite, la projection des points M, μ se fait, sur OO', à égale distance des points O, O'. De cette remarque, découle immédiatement la suivante : *les projections des segments correspondants* MM', $\mu\mu'$, *sur* OO', *sont égales*.

Traçons par M, μ' des parallèles à OO'; puis, par M', μ des perpendiculaires à cette même direction OO'. Nour formons ainsi deux triangles MM'H, $\mu\mu'K$ qui ont leurs côtés perpendiculaires, deux à deux. Nous avons donc la relation

$$\frac{MM'}{\mu\mu'} = \frac{MH}{\mu K};$$

mais $$MH = \mu'H,$$

donc, $$MM' = \mu\mu' \cdot \frac{\mu'K}{\mu K}.$$

En prenant le point O′ de façon que l'angle M′OO′ soit suffisamment voisin de 90°, on pourra, avec une base OO′, relativement petite, mesurer des distances M, M′, beaucoup plus grandes. Tout revient donc, comme l'on voit, à mesurer les trois côtés d'un triangle $\mu\mu'$K, facile à déterminer ; aussi, croyons-nous pouvoir signaler cette solution, comme particulièrement simple.

Nous terminerons ce chapitre en nous proposant l'examen du cas intéressant où les extrémités du segment inaccessible sont invisibles.

79. La distance des deux points invisibles. — Supposons, pour mieux préciser le caractère pratique du problème que nous abordons ici, que Δ, Δ′ représentent deux routes rectilignes, bifurquant en un certain point O, invisible. La même hypothèse étant faite pour O′, point de concours des droites δ, δ′ ; on peut alors demander : 1° de déterminer, sur la droite AB, le point où elle est rencontrée par OO′ ; 2° d'évaluer la distance OO′ et de jalonner cette droite.

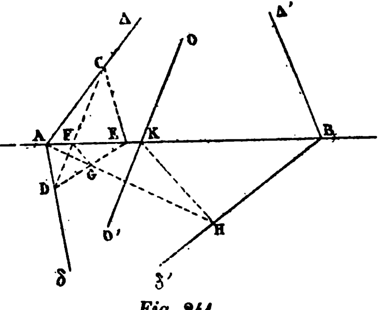


Fig. 241.

Prenons sur AB un point arbitraire E, suffisamment rapproché de A, pour que les jalonnements puissent être effectués rapidement. Après avoir mené EC, ED parallèles, respectivement, à Δ et à δ′, la droite CD indique déjà la direction de OO′.

Pour avoir le point de rencontre de OO′ avec AB, il suffit de construire, comme l'indique la figure, le point K, homologue de F ; la parallèle à CD, menée par K, est la droite cherchée.

Enfin la longueur inconnue OO′ est donnée par la formule

$$OO' = CD.\frac{AF}{AK}.$$

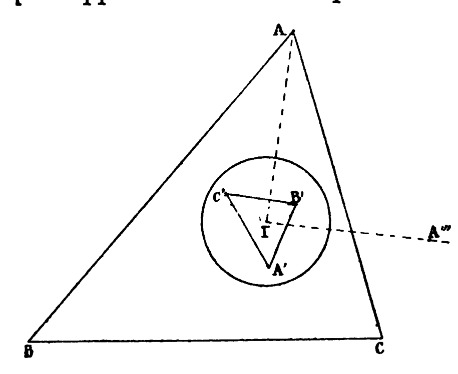
(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Neuberg.

... 1° L'exercice 273, dont il a été question au commencement de l'article « Géométrie et Mécanique (*) » m'a conduit aux deux propositions suivantes :

a). Soient ABC, A'B'C' deux triangles, polaires réciproques par rapport au cercle I. La polaire du centre de gravité G' de A'B'C' par rapport au cercle I coïncide avec la droite harmoniquement associée au centre I par rapport au triangle ABC.



J'observe que, A″ étant le milieu de B'C' et IA‴ une parallèle à B'C' (ou une perpendiculaire à IA), les droites IB' et IC', IA″ et AI‴ forment un faisceau harmonique, il en sera donc de même des droites menées, par A, perpendiculairement aux rayons IB' et IC', IA″ et IA‴; ces droites sont : AC, AB, la polaire de A″ et IA. La médiane A'A″ a donc pour pôle l'intersection de BC avec la conjuguée harmonique de IA, par rapport à BAC...

En particulier, si le cercle I est circonscrit à ABC, le centre de gravité de A'B'C' a pour polaire, par rapport à ce cercle, la droite joignant les pieds des bissectrices extérieures de ABC.

b.) Une proposition analogue, pour le tétraèdre, se démontre, identiquement de la même manière. En particulier :

Si I est le centre de la sphère touchant les faces du tétraèdre ABCD aux points A', B', C', D', le plan polaire du centre de

(*) V. *Journal*, p. 49.

gravité du tétraèdre A′B′C′D′ coïncide avec le plan harmoniquement associé à I par rapport au tétraèdre ABCD.

2° Voici une manière élémentaire d'exposer *les polaires par rapport aux polygones.*

Soient différentes droites D_1, D_2, D_3, ... données par leurs équations

$$d_1 \equiv x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0,$$
$$d_2 \equiv x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0, \ldots$$

Soient aussi ε_1, ε_2, ... les valeurs de d_1, d_2, ... pour un point M dont les coordonnées cartésiennes sont (x_1, y_1). Ce sont les *coordonnées plurilatères de* M; D_1, D_2 ... sont les *coordonnées courantes,* si on laisse (x, y) indéterminées. L'équation

$$\frac{d_1}{\varepsilon_1} = \frac{d_2}{\varepsilon_2},$$

représente la droite menée par le point de concours de D_1 et D_2, et le point M.

L'équation

$$\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} = 0,$$

représente la polaire de M par rapport aux deux droites D_1, D_2.

Si l'on considère le triangle D_1, D_2, D_3 on voit que la droite

$$\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \frac{d_3}{\varepsilon_3} = 0,$$

passe par les points $\begin{cases} \dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2} = 0 \\ d_3 = 0 \end{cases}$, etc.

C'est donc la *droite harmoniquement associée* à M par rapport au triangle.

Il est naturel de continuer ainsi. Par exemple, la droite représentée par

$$\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \frac{d_3}{\varepsilon_3} + \frac{d_4}{\varepsilon_4} = 0,$$

passe 1° par les points $\begin{cases} \dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2} = 0\,; \\ \dfrac{d_3}{\varepsilon_3} + \dfrac{d_4}{\varepsilon_4} = 0\,; \end{cases}$ 2° $\begin{cases} \dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2} + \dfrac{d_3}{\varepsilon_3} = 0 \\ d_4 = 0, \end{cases}$

Ce qui fait sept points. — Cette droite est la polaire de M par rapport au quadrilatère $D_1D_2D_3D_4$.

Pour six droites $D_1, D_2, \ldots, D_6$, la droite

$$\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \ldots + \frac{d_6}{\varepsilon_6} = 0,$$

donne ce joli théorème :

Si l'on partage six droites en deux groupes de trois droites, on forme deux triangles : le point d'intersection des polaires d'un point M *par rapport à ces deux triangles est sur une droite fixe de quelque manière qu'on fasse le groupement.*

On pourrait dire aussi que *cette droite passe par le point de concours de la polaire de* M, *par rapport à l'angle* $D_1 D_2$ *avec la polaire de ce point par rapport aux quadrilatères* $D_3 D_4 D_5 D_6$.

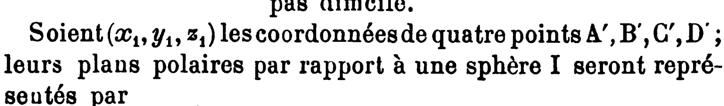
L'interprétation géométrique de l'équation $\Sigma \frac{\delta_1}{\varepsilon_1} = 0$ est très facile.

Si une sécante MN rencontre la polaire en N ; les droites $(D_1, D_2, \ldots)$, en $(P_1, P_2, \ldots)$, on a

$$\Sigma \frac{NP_1}{MP_1} = 0 \text{ (*)}, \text{ ou } \quad \Sigma \frac{MN - MP_1}{MP_1} = 0,$$

ou $$MN \Sigma \frac{1}{MP_1} - n = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{MN} = \frac{1}{n} \Sigma \frac{1}{MP_1},$$

n étant le nombre des droites $D_1, D_2, \ldots$



Des développements semblables s'appliquent à un système de plans.

Il n'y a là rien de nouveau, si ce n'est peut-être la forme élémentaire de la rédaction.

3. Pour le théorème *b*, énoncé ci-dessus, la démonstration analytique n'est pas difficile.

Soient (x_1, y_1, z_1) les coordonnées de quatre points A', B', C', D' ; leurs plans polaires par rapport à une sphère I seront représentés par

$$\delta_1 \equiv xx_1 + yy_1 + zz_1 - R^2 = 0, \ldots$$

L'équation $\delta_1 - \delta_2 = 0$ représente un plan passant par l'origine, et par l'intersection des deux plans polaires de A' et B' ; l'équa-

(*) Les perpendiculaires abaissés de M et N sur D_1, égales à ε_1 et δ_1, sont dans le rapport $MP_1 : NP_1$.

tion $\delta_1 + \delta_2 = 0$ représente donc le plan passant par l'intersection des plans polaires de A', B' et conjugué avec celui qui passe par le centre I. Considérons l'équation.

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = 0,$$

équivalente à $\Sigma x \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = R^2$;

elle représente le plan polaire de I par rapport au tétraèdre ABCD, et aussi le plan polaire du centre de gravité de A'B'C'D', par rapport à la sphère.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur au collège de Courdemanche.

(*Suite et fin*, voir p. 117.)

---

74. — Résoudre l'équation

$$\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 5x = 0.$$

Posant $\operatorname{tg} x = y$, nous trouvons

$$y + \frac{2(3y - y^3)}{1 - 3y^2} + \frac{5y - 10y^3 + y^5}{1 - 10y^2 + 5y^4} = 0,$$

Abstraction faite de la solution évidente $y = 0$, cette équation devient

$$7y^6 - 29y^4 + 25y^2 - 3 = 0,$$

ou

$$(7y^4 - 22y^2 + 3)(y^2 - 1) = 0.$$

Finalement $\quad y^2 = 1, \quad y^2 = 3, \quad y^2 = \frac{1}{7}.$

Les deux premières équations donnent

$$x = \pm 45° + K\pi, \qquad x = \pm 60° + K\pi.$$

Autrement. — On a

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 5x + 2\operatorname{tg} 3x = \frac{2\sin 3x}{\cos 3x} + 2\,\frac{\sin 3x \cos 3x}{\cos x \cos 5x}$$

$$= 2\sin 3x \left(\frac{1}{\cos 3x} + \frac{\cos 3x}{\cos x \cos 5x}\right) = 0$$

d'où

$$\sin 3x = 0, \quad x_1 = \frac{K\pi}{3};$$

puis

$$\frac{1}{\cos 3x} + \frac{\cos 3x}{\cos x \cos 5x} = 0,$$

$$\cos^2 3x + \cos x \cos 5x = 0,$$

$$1 + \cos 6x + \cos 6x + \cos 4x = 0,$$

$$\cos^2 2x + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x = 0;$$

d'où : 1° $\cos 2x = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{K\pi}{2};$

et 2° $\cos 2x = -1, \quad x_2 = (2K+1)\frac{\pi}{2};$

3°, enfin, $\cos 2x = \frac{3}{4}.$

C'est à cette dernière valeur que correspond la relation $\text{tg}^2 x = \frac{1}{7}$, trouvée plus haut.

75. — Résoudre l'équation

$$\text{tg}\, x + 2\text{tg}\, 3x + 2\text{tg}\, 5x + \text{tg}\, 7x = 0.$$

On peut l'écrire

$$\sin 8x \left(\frac{1}{\cos x \cos 7x} + \frac{2}{\cos 3x \cos 5x}\right) = 0.$$

Cette équation donne $\sin 8x = 0, \quad x = \frac{K\pi}{8};$

et $2\cos x \cos 7x + \cos 3x \cos 5x = 0,$

ou $3\cos 8x + 2\cos 6x + \cos 2x = 0. \quad (1)$

Posant

$$\cos 2x = y,$$
$$\cos 8x = 1 - 8y^2 + 8y^4$$
$$\cos 6x = 4y^3 - 3y$$

l'équation (1) devient

$$24y^4 + 8y^3 - 24y^2 - 5y + 3 = 0,$$

ou $(y+1)(2y+1)(12y^2 - 14y + 3) = 0.$

On a donc $\cos 2x = -1, \quad x = (2K+1)\frac{\pi}{2};$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}, \quad x = \pm 60° + K\pi.$$

$$\cos 2x = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{12}.$$

76. — Résoudre l'équation

$$\text{tg}\, x + a\,\text{tg}\, 2x + a\,\text{tg}\, 3x + \text{tg}\, 4x = 0.$$

On a $\frac{\sin 5x}{\cos x \cos 4x} + \frac{a \sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} = 0;$

d'où $\sin 5x = 0, \quad x = \frac{K\pi}{5};$

puis $a \cos x \cos 4x + \cos 2x \cos 3x = 0$

$$a \cos 5x + a \cos 3x + \cos 5x + \cos x = 0.$$

Posant $y = \cos x,$

nous aurons $\cos 3x = 4y^3 - 3y.$

$$\cos 5x = 16y^5 - 20y^3 + 5y.$$

Après avoir supprimé la racine zéro

$$\cos x = 0, \quad x = (2K+1)\frac{\pi}{2}$$

on trouve $8y^4(a+1) - 2y^2(4a+5) + a + 3 = 0$ etc...

COMPOSITIONS POUR L'ÉCOLE NAVALE

CONCOURS DE 1888

Arithmétique.

Calculer, a moins de 0,01 près, et en centièmes, la valeur de l'expression

$$\sqrt{\frac{\pi \times 9{,}87654321}{17}}$$

Algèbre.

Étant donné un triangle ABC, rectangle en A et isocèle, et un point D situé sur le côté AB. Par un point X, situé sur le côté AC, on mène XE parallèle à AB et l'on joint ED. Désignons par b le côté $AB = AC$, par x la distance $CX = XE$, et par d la distance AD.

1° L'expression du volume engendré par le trapèze AXED tournant autour de AC.

2° L'interprétation géométrique dont cette expression est susceptible, lorsque l'on donne à x des valeurs négatives.

3° L'étude des variations du volume représenté par cette expression, quand le point X se meut sur AC et sur son prolongement au-delà du point C.

4° L'étude du même problème, en supposant le point D situé à droite du point B.

5° L'étude du même problème, en supposant le point D situé à gauche du point A.

Géométrie.

D'un point pris sur la surface d'une sphère on peut abaisser toujours un arc de grand cercle perpendiculaire à un petit cercle donné.

Définitions et théorèmes à l'appui.

Propriétés des arcs de grand cercle perpendiculaires et obliques à un arc de petit cercle.

Géométrie analytique.

Les axes étant supposés rectangulaires, on considère la conique définie par l'équation

$$[(x - a)^2 + y^2 - \rho^2](1 + m^2) - (y - mx)^2 = 0,$$

dans laquelle a et ρ sont des constantes et m un paramètre variable. On demande de montrer :

1° Que cette conique a un double contact avec la circonférence

$$(x - a)^2 + y^2 - \rho^2 = 0,$$

aux points où elle est coupée par la droite

$$y - mx = 0,$$

2° Que cette conique est une parabole, quel que soit m :

Équation de l'axe de cette parabole ; cet axe passe par un point fixe quand m varie. Lieu géométrique des points de contact des tangentes menées par l'origine à toutes ces paraboles.

3° Aux points où chacune de ces paraboles coupe l'axe des x, on mène des normales : Lieu géométrique du point de rencontre de ces normales.

Calcul de logarithmes.

Calculer les valeurs de x comprises entre 0° et 360° qui satisfont à l'équation

$$\sin^3(2x + 13°) = \frac{0{,}0643217 \times \cos(212° \, 10' \, 22'')}{(\mathrm{tg}\, 321° \, 21' \, 19'')^4}$$

Géométrie descriptive.

Une droite est définie par les deux points a, a' ; b, b' ; $\alpha a = 42^{mm}$, $\beta b = 24^{mm}$, $\alpha a' = 12^{mm}$, $\beta b' = 58^{mm}$, $\alpha\beta = 80^{mm}$. On demande :

1° De déterminer les projections de la perpendiculaire commune à cette droite et à la ligne de terre.

2° De tracer les projections de la sphère décrite sur cette perpendiculaire commune comme diamètre : intersections avec les plans de projections.

3° De tracer les projections du cube, circonscrit à cette sphère, dont l'une des faces passe par la droite donnée et dont l'une des arêtes est parallèle à cette droite.

BIBLIOGRAPHIE

A treatise on plane trigonometry, par M. J. Casey, LL. D., F. R. S., professeur à l'Université catholique de Dublin. Un vol. in-8° de XVI-276 pages avec 66 figures dans le texte. Dublin, Hodges, Figgis et Londres, Longmans, Green. 1888.

Le lecteur peut bien préjuger de ce qu'il rencontrera dans un traité classique de trigonométrie ; il semblerait donc inutile d'en parcourir la substance pour aboutir à une énumération sans intérêt. Cependant, la disposition d'ensemble de ce livre, ainsi que le choix des démonstrations et la profusion des exercices qu'il renferme, nous engagent à lui donner ici une attention particulière.

En 260 pages, l'auteur a réuni toutes les notions essentielles, en ayant soin de donner à chaque objet d'étude le développement qu'il méritait.

Il insiste, au début, comme il est nécessaire, sur l'étude des variations qu'éprouvent les différentes lignes trigonométriques et sur les changements de signes qui les affectent (chap. I).

Passant à l'établissement des formules principales (chap. II), il propose de les classer en neuf catégories, suivant l'objet spécial auquel elles peuvent s'appliquer :

Relations entre lignes d'un même arc ; formules d'addition, de multi-

plication, de division, de transformation de produits en sommes ou différences, et réciproquement; relations entre fonctions inverses; élimination et identités trigonométriques.

La plupart des démonstrations sont appuyées de relations géométriques et les deux dernières subdivisions sont accompagnées d'applications particulièrement intéressantes.

Au chapitre III, p. 81 et suiv., l'auteur expose une démonstration rigoureuse de la limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pour n infini. Il établit (p. 87) que le nombre e, qui exprime cette limite, est incommensurable. En raison de l'importance de cette constante dans l'Analyse, il eût été utile de démontrer que ce nombre n'est pas racine d'une équation du second degré.

Rappel et comparaison des propriétés des deux principaux systèmes de logarithmes népériens et ordinaires.

La transition devient très naturelle pour arriver au calcul des tables trigonométriques des lignes usuelles (chap. IV) et de leur interpolation, puis à la transformation des équations et formules trigonométriques, pour les rendre calculables par logarithmes (chap. V).

La résolution des triangles fait l'objet du chapitre VI. Le triangle rectangle sert d'introduction, puis on passe aux triangles obliquangles et aux formules classiques qui relient les divers éléments d'un triangle et préparent ainsi les problèmes variés auxquels donne lieu la résolution des triangles. Les applications à la topographie, exposées dans six questions et complétées par vingt-et-un exercices, justifient l'importance donnée à ce chapitre, terminé par des questions plus spéciales sur les médianes, les bissectrices, les lignes concourantes et le problème de Malfatti, et enfin sur la trigonométrie du quadrilatère.

Le chapitre VII est consacré à la démonstration des formules de Moivre et d'Euler, qui établissent une liaison si intime entre les développements en série, le binôme de Newton et les exponentielles imaginaires.

Incidemment, l'auteur est amené à signaler, dans douze exercices, les propriétés les plus essentielles des nombres de Bernoulli; puis, la remarquable propriété des cordes d'un cercle issues d'un même point de la circonférence et interceptant des arcs égaux. Cette propriété, rencontrée par Viète, établit la relation entre les quantités de la forme $x^n + \frac{1}{x^n}$, et en donne une signification géométrique.

La même forme analytique se rencontre dans la résolution de l'équation binôme, ou, plus généralement, des équations réciproques; mais, en associant convenablement les racines, on obtient des binômes du second degré, de la forme $(x^2 - 2\cos Kx + 1)$, qui admettent aussi une interprétation géométrique élégante, connue sous le nom de théorèmes de Cotes et de Moivre, et relative à des rayons vecteurs de la circonférence

Un paragraphe important est consacré à la décomposition de $\sin\theta$, $\cos\theta$ en facteurs et de $\operatorname{tg}\theta$ en fractions, et à l'énoncé de curieuses conséquences de la formule de Crofton.

Signalons, pour terminer ce chapitre, l'expression d'une série de sinus et cosinus d'arcs en projection arithmétique.

Le huitième et dernier chapitre, intitulé : *Angles imaginaires*, est divisé en deux paragraphes.

Après avoir fait connaître ce que deviennnent les développements de

$\sin x$ et $\cos x$ lorsque x est remplacé par $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ l'auteur s'occupe des expressions $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$, $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ qui, abstraction faite de i, prennent le nom de sinus et cosinus hyperboliques. Les fonctions hyperboliques sont intimement liées aux fonctions circulaires; et pour passer d'une formule de trigonométrie rectiligne à la formule correspondante de trigonométrie hyperbolique, il suffit de changer θ en $i\theta$, cos $(i\theta)$ en $Ch\theta$, sin $(i\theta)$ en $iSh\theta$, tg $(i\theta)$ en $iTh\theta$.

Les notations sont celles de Riccati, adoptées dans les récents ouvrages et articles publiés sur les fonctions hyperboliques par MM. Laisant, Günther et Mansion.

Plus d'un millier d'exercices, et les réponses à trois cents d'entre eux, donnent au lecteur les facilités nécessaires pour appliquer les notions exposées dans les différents paragraphes.

Tel que nous venons de le parcourir, l'ouvrage de M. Casey ne demeurera pas isolé dans l'enseignement classique; nous pouvons espérer, en effet, que l'auteur publiera bientôt un traité semblable de trigonométrie sphérique. En attendant, nous ne doutons pas de l'accueil favorable que le premier rencontrera auprès du public mathématique, qui a toujours si justement apprécié les ouvrages du savant professeur de l'Université de Dublin.

H. Brocard.

Recueil de tables numériques. — Prix : **2** fr. **25** ; Union postale, **2** fr. **45**.

Les *éléments de trigonométrie plane et sphérique*, qui viennent de paraître et auxquels nous avons fait récemment (*) un intéressant emprunt avant leur publication, nous ont particulièrement frappé. Nous avons compris, en les lisant, tout le bien que nous en avait dit, il y a quelque temps l'un des juges (**) du concours à la suite duquel cet ouvrage a été si justement couronné. Nous pouvons lui prédire, en toute certitude, un grand et légitime succès. G. L.

Le nombre des esprits qui s'intéressent aux questions scientifiques s'accroît tous les jours.

Cette partie notable du grand public est composée des personnes qui, n'ayant pas fait de la Science une étude spéciale, en sentent toute l'importance, et de celles que les nécessités de la vie ont empêchées d'obéir à leur inclination pour cette étude.

Les unes et les autres veulent être tenues au courant des travaux, des découvertes scientifiques, et c'est pour elles que M. Hément, inspecteur honoraire de l'instruction publique, vient de publier chez MM. Gauthier, Villars et Fils, un charmant ouvrage à **2** fr. **50** *les étoiles filantes et les bolides,* dans lequel il expose en quelques pages élégantes et claires, ornées de fort belles gravures, tout ce que l'on sait de ces intéressants météores que chacun a vus mais sur lesquels peu de personnes possèdent des renseignements précis.

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

SESSION DE JUILLET 1887.

ACADÉMIE DE CLERMONT

1. — 1° Résoudre l'équation :

$$\frac{x^2}{3} = \frac{2 + x^3}{x(-2 + x^3)}.$$

2° On donne un quart de cercle AOB, de rayon R. Par un point M de l'arc AB, on mène la tangente MC, la perpendiculaire MD à OB et le rayon OM. Déterminer le point M de telle sorte qu'en faisant tourner la figure autour de OA, le volume engendré par le trapèze ODMC soit dans un rapport donné m avec le volume engendré par le secteur circulaire, MOB. — Application : $m = 2$. Calculer, pour cette valeur, l'angle MOB.

2. — 1° Etant donné un rectangle ABCD de dimensions $BC = a$,

---

(*) *Journal*, pp. 92 et 104.

(**) M. Catalan.

BA = o, on mène, par les sommets B et C, des droites extérieures au rectangle et faisant avec BC, des angles FBC, FCB, égaux à un même angle aigu α ; on fait la même construction sur le côté opposé AD, et l'on obtient un quadrilatère EFGH.

1° Démontrer que ce quadrilatère est un losange.

2° Calculer en fonction de a, b, α, les diagonales et les côtés.

3. — 1° Démontrer géométriquement que le rapport des aires de deux triangles ayant un angle égal ou supplémentaire est égal au rapport des produits des côtés comprenant l'angle.

2° On donne un triangle BAC. Mener une sécante DE, coupant les côtés AB, AC, égale à BC et telle, que le rapport des aires du triangle DAE et du triangle ABC soit égal à un nombre donné m. Calculer alors le rapport des volumes engendrés par ces triangles tournant respectivement autour de DE et BC.

Application :

$$A = 60, \quad c = 2, \quad b = 7, \quad m = 2.$$

Résoudre un triangle connaissant deux côtés b, c et l'angle compris A.

Application : b et c sont les racines de l'équation

$$12x^2 - 371x + 2809 = 0.$$

l'angle A est donné par la relation :

$$\sin\frac{A}{3} = \frac{x' + x''}{x'x''};$$

x' et x'' étant les racines de l'équation précédente.

5. — 1° La droite joignant deux sommets opposés d'un octogone régulier le partage en deux parties égales. Calculer la surface et le volume du solide engendré en faisant tourner l'une des parties autour de la droite : 1° en fonction du rayon R du cercle circonscrit ; 2° en fonction du côté c de l'octogone.

Application $c = 1^m$.

Calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ connaissant $\sin a$.

Application : $-\sin a = -\frac{1}{3}$.

QUESTION 222

Solution par M. l'abbé Gelin, professeur au Collège Saint-Quirin, à Huy.

Trouver la condition que doit vérifier le paramètre α pour que les polynomes

$$U = x^4\,séc^2\,\alpha - 2x\,tg\,\alpha + 1,$$
$$V = x^4 - 2x^3\,tg\,\alpha + séc^2\,\alpha$$

admettent un diviseur commun du second degré.

(B. Hanumenta Rau.)

Si l'on observe que les polynomes U et V sont réciproques, on pourra poser :

$$U = x^4 \text{séc}^2\alpha - 2x \operatorname{tg}\alpha + 1 = (x^2 \text{séc}^2\alpha + ax + 1)(x^2 + bx + 1),$$
$$V = x^4 - 2x^3 \operatorname{tg}\alpha + \text{séc}^2\alpha = (x^2 + ax + \text{séc}^2\alpha)(x^2 + bx + 1);$$

d'où, en effectuant les produits et identifiant,

$$(1) \qquad a + b\,\text{séc}^2\alpha = 0,$$
$$(2) \qquad ab + 1 + \text{séc}^2\alpha = 0,$$
$$(3) \qquad a + b = -2\operatorname{tg}\alpha.$$

Soustrayant (3) de (1), il vient

$$b(\text{séc}^2\alpha - 1) = 2\operatorname{tg}\alpha,$$

ou

$$b\operatorname{tg}^2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha;$$

d'où

$$(4) \qquad \operatorname{tg}\alpha = 0, \qquad b\operatorname{tg}\alpha = 2.$$

Dans la première hypothèse :

$$\text{séc}^2\alpha = 1, \quad a = \pm\sqrt{2}, \quad b = \mp\sqrt{2};$$

et, par suite,

$$U = V = x^4 + 1 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1).$$

Dans la seconde hypothèse, éliminons $\text{séc}^2\alpha$ entre (1) et (2), et $\operatorname{tg}\alpha$ entre (3) et (4) ; il vient

$$a(b^2 - 1) + b = 0,$$
$$ab + b^2 + 4 = 0;$$

puis, en éliminant a entre ces deux dernières équations,

$$b^4 + 2b^2 - 4 = 0,$$

d'où

$$b = \pm\sqrt{\sqrt{5} - 1};$$

puis
$$a = -\frac{b}{b^2 - 1} = \mp\frac{\sqrt{\sqrt{5} - 1}}{\sqrt{5} - 2} = \mp\sqrt{(\sqrt{5} + 2)^2(\sqrt{5} - 1)}$$
$$= \mp\sqrt{5\sqrt{5} + 11},$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{b} = \pm\frac{2}{\sqrt{\sqrt{5} - 1}} = \pm\sqrt{\sqrt{5} + 1},$$
$$\text{séc}^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sqrt{5} + 2,$$

et, par suite,

$$U = x^4(\sqrt{5} + 2) \mp 2x\sqrt{\sqrt{5} + 1} + 1$$
$$= [x^2(\sqrt{5} + 2) \mp x\sqrt{5\sqrt{5} + 11} + 1][x^2 \pm x\sqrt{\sqrt{5} - 1} + 1];$$



$$V = x^4 \mp 2x^3\sqrt{\sqrt{5}+1} + \sqrt{5} + 2$$
$$= [x^2 \mp x\sqrt{5\sqrt{5}+11} + \sqrt{5}+2][x^2 \pm x\sqrt{\sqrt{5}-1} + 1].$$

NOTA. — M. Chapron, dans la solution qu'il nous adresse, a généralisé la question proposée par M. B. Hanumenta Rau; et il a considéré le cas de *deux polynômes inverses* tels que
$U = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $V = ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a$,
ou $U = ax^5 + \ldots + f$, $V = fx^5 + \ldots + a$, etc.

L'analyse nécessaire à cette généralisation exige quelques notions de calcul qui ne sont pas assez élémentaires pour être reproduites dans ce journal. Nous indiquons seulement les résultats signalés par M. Chapron dans sa très élégante solution.

Dans le cas des polynômes du quatrième degré, si l'on exprime que le résultant des formes U, V est nul, on trouve un déterminant ζ du huitième ordre ; mais, comme l'observe M. Chapron, ζ peut se mettre sous la forme

$$\zeta = (a+b+c+d+e)(a-b+c-d+e)\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ o & a & l+e & 1 \\ o & e & a+d & 1 \\ e & d & c & 1 \end{vmatrix}^2$$

Si le premier facteur de ζ est nul, 1 est la racine commune; de même, si le deuxième facteur est nul, -1 est la racine commune. Enfin, dans le cas où le troisième facteur est nul, les deux polynômes admettent un diviseur commun du second degré.

NOTA. — Cette question a été aussi résolue par M. Boutin, professeur au collège de Courdemanche.

QUESTION 224

Solution par M. QUINTARD, à Arbois.

---

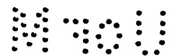
a, b, c *étant trois entiers satisfaisant à la condition*

(1) $$ab + bc + ca = 1,$$

prouver que

$$\Sigma(ab-1)(a+1)(b+1)(c-1) = \mathfrak{M}(a+b+c+1).$$

(Catalan.)



On a $$(ab - 1)(a + 1)(b + 1)(c - 1)$$
$$= a^2b^2c + a^2bc + ab^2c + abc - a^2b^2 - a^2b - ab^2 - abc$$
$$+ ab + a + b - c - ab - bc - ca + 1\,;$$

ou, en tenant compte de (1) :

$$a^2b^2c + 2a^2bc + 2ab^2c - ab(a + b + c) + a + b - c + abc$$

La somme proposée θ est alors

$$\theta = a^2b^2c + 2a^2bc + 2ab^2c - ab(a + b + c) + a + b - c + abc$$
$$+ b^2c^2a + 2b^2ca + 2bc^2a - bc(a + b + c) + b + c - a + abc$$
$$+ c^2a^2b + 2c^2ab + 2ca^2b - ca(a + b + c) + c + a - b + abc.$$

Réduisant, on a

$$\theta = abc + 4abc(a + b + c) + 3abc = 4abc(a + b + c + 1)$$

Donc, finalement

$$\Sigma(ab - 1)(a + 1)(b + 1)(c - 1) = 4abc(a + b + c + 1).$$

NOTA. — Solutions analogues par MM. Boutin, professeur au collège de Courdemanche; Ignacio Beyens, capitaine du génie, à Cadix; J. Chapron, à Bragelogne; l'abbé E. Gelin, professeur au collège Saint-Quirin, à Huy (Belgique).

QUESTION 228

Solution par M. Henry GALOPEAU, élève au Lycée d'Angoulême.

On donne dans un plan, un angle xoy *et un point* A. *Par les points* O,A, *on fait passer une infinité de circonférences. Soit* BC *la corde déterminée dans l'une d'elles, par les côtés de l'angle. Soit* M *la projection de* A *sur* BC. *Le lieu de* M *est la droite de Simson, relative aux données.*

Soient P, Q, les projections du point A, sur les droites *ox*, *oy*. D'après le théorème de Simson, le point M se trouve sur la droite fixe PQ; celle-ci est donc le lieu décrit par le point mobile M.

Solution identique par M. René-Henri Martin, élève au lycée Condorcet (Classe de M. Brisse).



QUESTIONS PROPOSÉES

286. — Soient, pour abréger :

$$N = (ab + cd)(ac + bd)(ad + bc),$$

$$\Delta = (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d).$$

Quelles sont les racines carrées des polynômes

$$LN - a^2\Delta,\quad LN - b^2\Delta,\quad LN - c^2\Delta,\quad LN - d^2\Delta\ ?$$

$a^3 - a(b^2+c^2+d^2) + 2bcd$.

(Catalan.)

287. — Sur le côté AC du triangle rectangle ABC, on prend le point D, de telle sorte que

$$\frac{AD}{DC} = \frac{m}{n}.$$

Par D, on élève, sur AC, la perpendiculaire DEF. Les points F, E étant les intersections de cette perpendiculaire avec les côtés AB, BC ; montrer que l'on a les relations :

$$(\alpha)\qquad \frac{\overline{AB}^h}{\overline{BP}^h} = \frac{(m+n)^h\left(\overline{AF}^h \pm \overline{CE}^h\right)}{m^h\ \overline{BC}^h \pm n^h\ \overline{AB}^h}.$$

$$(\beta)\qquad S = \frac{mn\,(m+n)^2\ \overline{AF}^3.\overline{BE}^3}{2\left(n^2\ \overline{AF}^2 + m^2\ \overline{BE}^2\right)^2}.$$

Dans ces expressions, BP est la perpendiculaire menée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse ; S représente l'aire du triangle ABC.

(G. Russo.)

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 12274-6-8.

ESSAI

SUR LA

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 147.)

CHAPITRE VIII

LES FIGURES INACCESSIBLES — LE PROBLÈME DE LA CAPITALE

Nous allons supposer maintenant que, dans la région inaccessible, nous ayions à considérer des points, en nombre quelconque, ou des droites; et nous nous proposons de résoudre un certain nombre de problèmes relatifs à ces figures.

Nous envisagerons d'abord le cas le plus simple qu'on puisse imaginer dans l'ordre d'idées que nous abordons maintenant, celui où la figure en question est formée par trois points A, B, C visibles, mais inaccessibles.

80. L'angle inaccessible. — Une première question se présente naturellement au début de cette étude. En supposant trois points A, B, C, dans les conditions que nous venons d'indiquer, on peut demander la valeur de l'angle ABC. En particulier on peut rechercher si ces trois points sont, ou non, en ligne droite; en supposant, bien entendu, que les lignes BC, AB, prolongées, ne pénètrent pas dans la partie accessible.

Ayant pris, quelque part, un point O; on mène, par O, une semi-droite Δ parallèle à BA; puis, par une deuxième opération, on déterminera une autre semi-droite Δ' parallèle à BC. Si les jalonnements Δ, Δ' sont bien dans le prolongement l'un de l'autre, les points considérés sont en ligne droite. Dans tous les cas, l'angle de Δ avec Δ' est égal à l'angle ABC.

Pour avoir Δ et Δ' on peut, cela va sans dire, opérer de diverses façons : la figure 241 reproduit la construction indiquée précédemment (§ **65**) : elle nous paraît donner, d'une façon

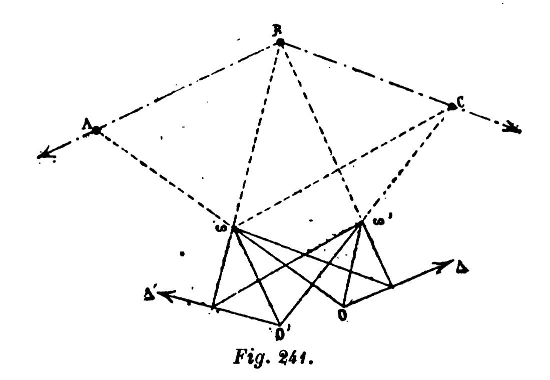


Fig. 241.

suffisamment pratique la valeur d'un angle inaccesible, quand on suppose, comme nous l'avons fait, que les prolongements des côtés de l'angle ne pénètrent pas dans la région accessible.

81. Les trois points inaccessibles en ligne droite. — Le cas où les trois points A, B, C sont en ligne droite mérite un examen particulier. Bien des solutions se présentent à l'esprit pour résoudre cette question : *trois points inaccessibles* A, B, C *étant supposés visibles, les lignes de visée* AB, AC, BC *ne pénétrant pas dans la région accessible, dire si ces points sont, ou ne sont pas, en ligne droite.*

On peut d'abord, comme nous venons de l'indiquer, tracer des parallèles aux côtés AB, BC et vérifier que ces alignements sont parallèles On peut aussi, en appliquant les méthodes exposées au chapitre précédent, calculer les distances AB, AC, BC et reconnaître que le plus grand de ces nombres est égal à la somme des deux autres. On peut encore, comme nous l'indiquons un peu plus loin, calculer l'aire du triangle ABC et voir si elle est nulle; etc, etc...

Mais ces diverses solutions exigent, sur le terrain, des opérations assez longues; nous allons en indiquer d'autres, plus pratiques.



PREMIÈRE SOLUTION. — Si les distances OA, OB, OC sont connues, ou si elles ont été calculées, on peut vérifier que les points A, B, C sont en ligne droite, au moyen d'une égalité que nous allons établir.

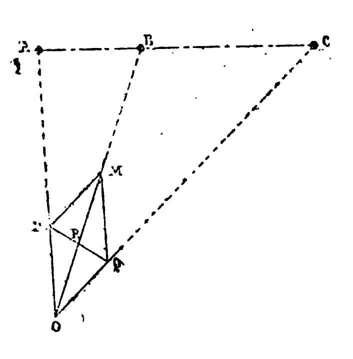


Fig. 242.

Prenons sur OB, dans la partie accessible, un point M; puis, menons les parallèles MP, MQ aux lignes OC et OA. Les triangles OPR, OAB, qui ont un angle commun, donnent

$$\frac{OAB}{OPR} = \frac{OA.OB}{OP.OR}.$$

On a, de même,
$$\frac{OBC}{OQR} = \frac{OB.OC}{OQ.OR}.$$

En observant que les triangles OPR, OQR sont équivalents, on peut écrire

$$\frac{OAC}{\frac{1}{2}OPQ} = \frac{2OA.OC}{OP.OQ} = \frac{OA.OB}{OP.OR} + \frac{OB.OC}{OQ.OR};$$

ou, finalement,

$$\frac{OM}{OB} = \frac{OP}{OA} + \frac{OQ}{OC}.$$

Réciproquement; si cette égalité est vérifiée, les trois points A, B, C sont en ligne droite.

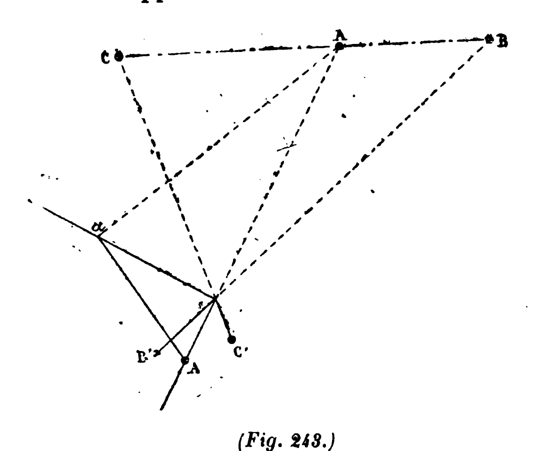
SECONDE SOLUTION — La méthode précédente exige que l'on connaisse les longueurs OA, OB, OC; celle que nous allons indiquer maintenant ne nécessite aucun calcul. Elle repose sur le principe des figures inverses.

Prenons un point arbitraire O. Soit $O\alpha$ un jalonnement perpendiculaire à la ligne de visée OA. Avec le simple cordeau, on prend, sur $O\alpha$, un point arbitraire α et l'on jalonne $\alpha A'$ perpendiculaire à αA. En répétant cette construction pour les points B et C, le cordeau ayant, dans les trois cas, *la même longueur* $O\alpha$, on obtient deux autres points B′, C′.

Cela fait, pour savoir si les points A, B, C sont en ligne droite, on se transporte avec une fausse équerre au point A′

et l'on relève l'angle (*) B'A'C'. L'instrument donne, en même temps, un angle égal au supplément de B'A'C'. En se plaçant au point O, on verra si l'angle B'OC' est, ou non, égal à ce supplément.

Cette construction, comme l'on voit, repose sur ce principe des figures inverses : *à une droite correspond une circonférence passant par le pôle*, ET RÉCIPROQUEMENT. Elle offre d'ailleurs l'avantage de pouvoir être effectuée dans un espace aussi limité qu'on voudra le supposer.



(*Fig. 243.*)

82. La mesure de l'angle inaccessible. — La méthode précédente peut servir aussi à mesurer l'angle inaccessible : mais il faut alors avoir à sa disposition un instrument permettant d'évaluer la grandeur des angles observés, par exemple, un goniomètre.

Représentons encore par A', B', C' les inverses des points inaccessibles A, B, C. Les quadrilatères ACA'C', BCB'C' étant inscriptibles; les angles α, α', d'une part ; β, β', d'autre part,

(*) L'expression *relever un angle*, que nous employons ici, ne veut pas dire qu'on ait besoin de l'expression numérique de cet angle ; on fait marquer aux branches de la fausse équerre, tout simplement, un angle égal à celui des semi-droites A'B', A'C' ; sa valeur n'importe pas et, pour le dire en passant, ceci distingue la fausse équerre du Goniomètre, instrument dont nous parlons plus loin, et qui, lui, donne la valeur de l'angle.

sont égaux, or, nous avons

$$zC'A' = \alpha' + C'OA',$$
$$zC'B' = \beta' + C'OB';$$

et, par conséquent,

$$B'C'A' = BCA + A'OB'.$$

Ainsi, après avoir construit les points A', B', C', inverses des points inaccessibles A, B, C, on obtiendra ACB, en retranchant B'OA' de l'angle observé B'C'A'.

Il y a pourtant lieu d'observer ici, pour éviter toute erreur, que, en appliquant cette règle, il faut compter l'angle B'C'A' de zéro à 2π; cet angle étant mesuré par la rotation de la semi-droite C'A' tournant autour de C', jusqu'à ce qu'elle vienne s'appliquer sur la semi-droite C'B', après avoir rencontré, non pas C'O, mais son prolongement; c'est-à-dire, la semi-droite

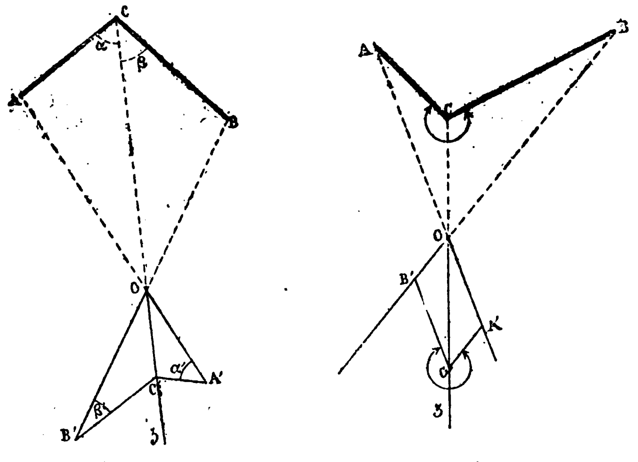


Fig. 244. *Fig. 245.*

C'z. Dans ces conditions, la règle est générale et conduit à des résultats pouvant varier de π à 2π ou de zéro à π, suivant que le saillant de l'angle est dirigé vers le point O comme dans la figure 245; ou vers le prolongement de OC, comme le montre la figure 244. On peut ainsi apprécier, non seulement la grandeur de l'angle inaccessible considéré, mais aussi sa disposition relativement à l'observateur.

Beaucoup d'autres solutions pourraient être proposées pour

déterminer de grandeur d'un angle inaccessible; mais nous croyons avoir indiqué les plus pratiques et, sans insister davantage sur cette question, nous abordons maintenant l'important problème de la capitale.

LE PROBLÈME DE LA CAPITALE

Parmi les problèmes qui se rattachent à l'angle inaccessible, le plus important, par l'application qu'on en fait dans l'art de la guerre, est celui qui se propose la détermination de la *capitale.* On sait qu'on entend, par là, la bissectrice d'un saillant, angle formé par deux lignes de fortification.

83. La solution par le Goniomètre (*). — 1° Soient CA, CB les côtés de l'angle inaccessible, formant, par exemple les arêtes d'un saillant; il s'agit de déterminer la capitale de ACB.

Fig. 246.

Sur les prolongements des côtés AC, BC on choisit, arbitrairement d'ailleurs, deux points D, E; et avec le Goniomètre, on relève les angles CED $= \alpha$, CDE $= \beta$. On a donc

$$ACB = \pi - \alpha - \beta.$$

Ayant ainsi calculé l'angle C, on se reporte, successivement, aux points D, E; et, par ces points, on trace deux jalonnements faisant avec DE, dans la partie opposée à C, des angles égaux à $\frac{C}{2}$; on obtient ainsi un certain point F.

De cette construction, il résulte d'abord que le quadrilatère EFDC est inscriptible.

Donc $$ECF = EDF = \frac{C}{2},$$

(*) Cette solution et la suivante sont empruntées (p. 21) à l'ouvrage : *la Guerre des sièges*, à l'usage des Académies militaires et des Ecoles de cadets en Autriche; par Moriz Brunner, capitaine de l Etat-major du Génie Autrichien, — traduit de l'Allemand, par H. Piette, capitaine du Génie. (Firmin Didot, 874).

$$\text{FCD} = \text{DEF} = \frac{\text{C}}{2};$$

puis $$\text{ECF} = \text{FCD}.$$

On peut observer aussi que FE = FD; or, à des cordes égales correspondent des arcs égaux; CF est donc la bissectrice de l'angle ECD.

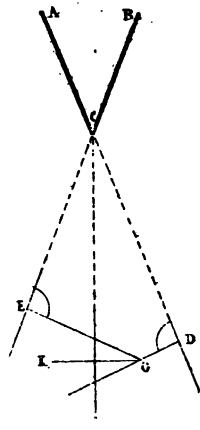


Fig. 247.

Un point F de la capitale étant ainsi déterminé, la ligne de visée s'obtient par un jalon fixé entre F et C, en ligne droite avec ces deux points.

84. La solution par l'équerre ordinaire. — Prenons, comme tout à l'heure, les points D, E; les perpendiculaires, menées par ces points, aux côtés CD, DE, donnent un certain point G. Si l'on trace la bissectrice GK de l'angle G, la capitale cherchée s'obtient en déterminant la ligne de visée Δ, qui, partant de C, tombe perpendiculairement sur GK.

85. La solution par la fausse équerre et le cordeau. — Si l'on ne possède pas les instruments que nous

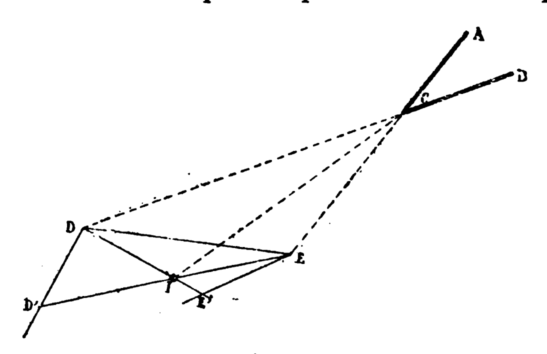


Fig. 248.

avons utilisés dans les solutions précédentes, on pourra toujours opérer avec une fausse équerre, ou avec un simple cordeau, comme nous allons l'indiquer.

Par les points D, E, au moyen de la ausse equerre, traçons des jalonnements DD′, EE′ respectivement parallèles aux lignes de visée CE, CD. Si nous prenons D′ arbitrairement, puis, avec un cordeau, E′E = D′D, par un théorème connu (*) les lignes DE′, ED′ se coupent en I, sur la capitale cherchée.

86. La solution génerale. — Les solutions qu'on vient de lire exigent que les prolongements des arêtes du saillant, pénètrent dans la région où l'on peut opérer. Il n'en est pas toujours ainsi; notamment, lorsque le saillant est obtus.

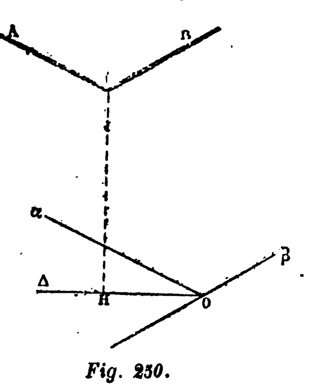


Fig. 250.

Mais voici une solution générale; c'est-à-dire, une solution pouvant être utilisée dans tous les cas possibles.

(*) Ce théorème a été proposé sous le n° 9020 dans l'*Educational times* et résolu dans le numéro de juin 1887. Voici, d'ailleurs, comment on peut le démontrer.

Soit OABC un parallélogramme; ayant pris AQ = CP, il faut montrer que AP et CQ se coupent, en I, sur la bissectrice de AOC. A cet effet, menons IR parallèlement à OA; je dis que IR = OR.

Fig. 249.

Le trapèze OACP et la droite IR parallèles aux bases, donnent:

(1) $IR.OC = OA.RC + CP.OR$

D'autre part, en considérant le triangle APB et la transversale QIC, on a

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{IP}{IA} \cdot \frac{CB}{CP} = 1.$$

Mais AQ = CP, donc

$$\frac{IP}{IA} = \frac{RC}{OR} = \frac{QB}{BC}.$$

La relation (1) peut alors s'écrire sous la forme

$$OR.\frac{OC}{IR.} = OA.\frac{QB}{CB} + CP = QB + CP = QB + AQ = AB.$$

Or, OC = AB; finalement

$$IR = OR.$$

Par un point O, arbitrairement choisi, on tracera, par l'un des procédés connus, des jalonnements Oα, Oβ respectivement parallèles aux semi-droites CA, CB. On détermine ensuite la bissectrice Δ de l'angle formé par Oα et le prolongement de βO; la projection de C sur Δ détermine, en H, un point de la capitale.

Cette construction s'applique, bien entendu, au cas où les prolongements des côtés de l'angle pénètrent sur le terrain accessible; elle se trouve même simplifiée parce que l'on peut prendre l'un des prolongements, pour constituer l'un des côtés de l'angle αOβ.

LES AIRES INACCESSIBLES

Nous avons appris, précédemment, à calculer la longueur d'un segment inaccessible; nous pouvons déterminer l'aire d'un triangle inaccessible en évaluant successivement ses trois côtés et en appliquant ensuite la formule de Héron. Sachant trouver l'aire d'un triangle inaccessible, on en déduit celle d'un polygone quelconque en décomposant celui-ci en triangles. Mais une pareille solution est fort peu pratique, vu les longueurs qu'elle comporte, et nous devons rechercher, pour ce problème, des solutions plus simples.

87. L'aire du triangle inaccessible. — *La méthode cartésienne.* Lorsque les côtés du triangle considéré ABC ne sont pas trop considérables ; si, en outre, les sommets ne sont pas très éloignés du terrain où l'on opère, la méthode cartésienne s'applique remarquablement bien à la détermination de l'aire de ce triangle.

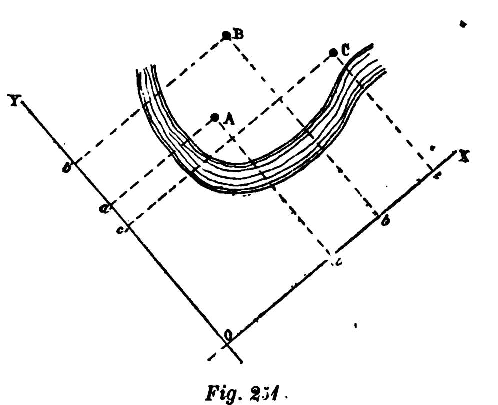


Fig. 251.

Après avoir tracé deux alignements rectangulaires Ox, Oy, on détermine avec l'équerre ordinaire, les projections des points A, B, C sur ces axes. Ayant relevé, au moyen de la chaîne, les longueurs Oa, Ob, Oc; Oa', Ob', Oc'; l'aire cherchée S est donnée par la formule connue (*).

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} Oa & Oa' & 1 \\ Ob & Ob' & 1 \\ Oc & Oc' & 1 \end{vmatrix}.$$

88. L'aire du polygone inaccessible. — On peut généraliser cette méthode et l'appliquer à la détermination de l'aire d'un polygone quelconque, $A_1A_2 \ldots A_n$, supposé inaccessible.

Dans ce cas, on a (**)

$$\pm 2S = \begin{vmatrix} Oa_1 & Ob_1 \\ Oa_2 & Ob_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Oa_2 & Ob_2 \\ Oa_3 & Ob_3 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} Oa_n & Ob_n \\ Oa_1 & Ob_1 \end{vmatrix}.$$

Dans la pratique, cette formule est commode parce qu'elle est générale et toujours applicable, quelle que soit la disposition des sommets du polygone. On sait comment l'aire du polygone se ramène à celle du triangle, en la décomposant en triangles; mais, pour les polygones inaccessibles, il peut se présenter une difficulté, résultant de ce fait que les triangles considérés doivent être, tantôt ajoutés; et, suivant les cas, tantôt retranchés. Or, pour des figures inaccessibles, il n'est pas toujours facile de distinguer le premier cas, du second. En employant la formule précédente, on évitera cette difficulté.

La construction précédente ne peut être employée que dans le cas où les points A, B, C ne sont pas très éloignés du terrain sur lequel on peut opérer ; elle n'est pas générale. Il nous reste donc à traiter, par des moyens plus pratiques, le problème des aires inaccessibles.

89. Aire du triangle inaccessible. *(Solutions diverses.)* — 1° Supposons d'abord qu'un seul sommet C du triangle

(*) On pourrait assurément se passer ici de la notation des déterminants; mais nous l'adoptons pour éviter toute discussion sur les signes dont il faut affecter les produits : Oa, Ob', etc., dont *la somme algébrique* fait connaître la valeur de S.

(**) *Cours de mathématiques spéciales*; t. II; p. 75.

soit accessible. Jalonnons un alignement Δ, passant par C, et prenons les réciproques A′, B′ des points A, B, par rapport à Δ. Avec la chaîne, nous pourrons relever les longueurs

$$C\alpha = a, \quad A'\alpha = a' ;$$
$$C\beta = b, \quad B'\beta = b'.$$

Désignons aussi par u et v les distances inconnues $A\alpha$, $B\beta$; nous avons

$$a^2 = ua', \quad b^2 = vb'.$$

D'ailleurs

$$ACB = AB\alpha\beta - AC\alpha - BC\beta.$$

Par suite.

$$ACB = \frac{u+v}{2}(a+b) - \frac{au}{2} - \frac{bv}{2}$$
$$= \frac{av+bu}{2};$$

Fig. 252.

ou finalement, $$ACB = \frac{ab}{2}\left(\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'}\right).$$

Cette solution s'applique particulièrement bien au cas où les sommets A, B sont très éloignés, lorsque la projection de AB, sur Δ, est relativement faible; car, dans cette hypothèse, les chaînages nécessaires se font sur de petites longueurs.

Lorsque les trois sommets sont inaccessibles, comme dans la *fig. 253*, on peut prendre, sur la ligne de séparation Δ, un point O, arbitrairement; puis observer que

$$ABC = OBC - OAB - OAC.$$

Mais ce procédé offre quelques longueurs et il est préférable d'attaquer le problème par des méthodes plus directes, comme celles que nous allons indiquer.

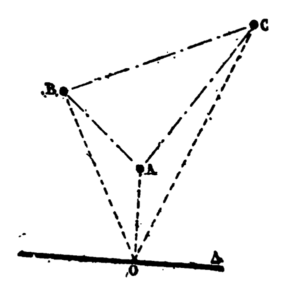


Fig. 253.

2° Supposons donc, pour nous placer dans le cas le plus difficile, les trois sommets inaccessibles, et jalonnons une droite Δ rencontrant les lignes de visée AC, AB en des points P, Q. Effectuons maintenant la construction qu'indique la figure 254, et qui nous a déjà servi (§§ 65 et 80).

Nous allons montrer que le triangle POQ est moyen proportionnel entre ABC et ROS.

Les triangles semblables ABP, POR, d'une part; CAQ, QOS, d'autre part; donnent :

$$\frac{AB}{OP} = \frac{AP}{OR}, \quad \frac{CA}{OQ} = \frac{AQ}{OS};$$

par suite

$$(1) \quad \frac{AB.AC}{OP.OQ} = \frac{AP.AQ}{OR.OS}.$$

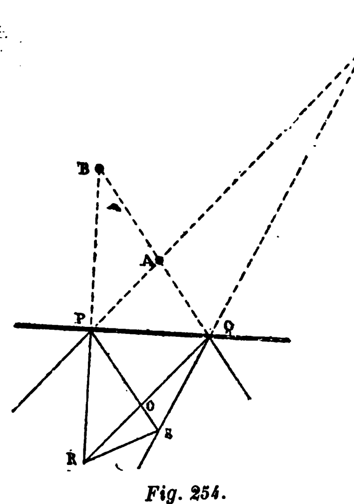


Fig. 254.

D'ailleurs, la figure APOQ étant un parallélogramme; donne donc $AP = OQ$, $AQ = OP$.

La proportion (1) prouve donc que l'on a

$$\frac{AB.AC}{OP.OQ} = \frac{OP.OQ}{OR.OS},$$

ou

$$\frac{ABC}{POQ} = \frac{POQ}{ROS}.$$

La détermination de l'aire inaccessible ABC est ainsi ramenée à celle des aires accessibles POQ, ROS. Le problème qui nous occupe se trouve donc résolu par une méthode présentant des conditions pratiques très acceptables, si l'on peut approcher suffisamment près de l'un des points inaccessibles. En effet, la figure PQRS, quelles que soient les dimensions de ABC, est aussi petite que l'on veut; du moins, si l'on opère dans le voisinage du point A.

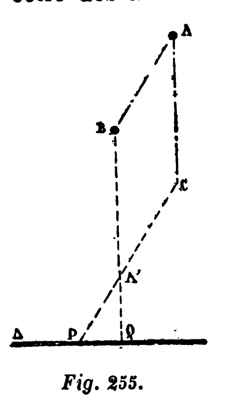


Fig. 255.

3° Lorsque les points A, B, C sont, tous les trois, très éloignés; on peut néanmoins appliquer la méthode précédente, en la modifiant comme nous allons l'expliquer.

On détermine d'abord les directions δ, δ' des lignes AB, AC; puis, sur une droite Δ, avec la fausse équerre, on détermine les points P, Q tels que CP soit parallèle à δ' et BQ à δ. En

cherchant (par le procédé indiqué tout à l'heure, par exemple) l'aire du triangle A'BC, on aura celle de ABC. Or, plus le point A est éloigné, plus le point A' se trouve rapproché de la région accessible; condition favorable, comme nous l'avons observé, à l'application de la méthode à laquelle nous venons de faire allusion.

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur au collège de Courdemanche.

(*Suite et fin*, voir p 117.)

---

77. — Résoudre le système :

$$\sin X + \sin Y + \sin Z = a,$$
$$\cos 2X + \cos 2Y + \cos 2Z = b,$$
$$\sin 3X + \sin 3Y + \sin 3Z = 3\left(1 - a - a^2 + ab - \frac{b}{2}\right) + 2a^3.$$

On a :
$$\cos 2X = 1 - 2\sin^2 X,$$
$$\sin 3X = 3\sin X - 4\sin^3 X;$$

Pour simplifier, posons $\sin X = x$, $\sin Y = y$, $\sin Z = z$;

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} a &= x + y + z = \Sigma x.\\ b &= 3 - 2(x^2 + y^2 + z^2) = 3 - 2\Sigma x^2,\\ 3\Sigma x - 4\Sigma x^3 &= 3\left(1 - a - a^2 + ab - \frac{b}{2}\right) + 2a^3.\end{aligned}\right.$$

Prenons, comme inconnues auxiliaires,

$$\beta = \Sigma xy = xy + xz + yz,$$
$$\gamma = xyz$$

x, y, z seront les racines de l'équation du 3me degré

$$(2)\qquad U^3 - aU^2 + \beta U - \gamma = 0,$$

On trouve d'ailleurs :

$$\Sigma x^2 = a^2 - 2\beta, \qquad \Sigma x^3 = a^3 - 3a\beta + 3\gamma.$$

Portant ces valeurs dans (1), on en déduit :

$$\beta = \frac{b + 2a^2 - 3}{4}, \qquad \gamma = \frac{1}{4}\left(1 + a - a^2 - \frac{b}{2}\right).$$

D'après cela, (2) devient :

$$4U^3 - 4aU^2 + (b + 2a^2 - 3)U + 1 + a - a^2 - \frac{b}{2} = 0.$$

Cette équation admet la racine $\frac{1}{2}$, et il reste, pour déterminer les deux autres inconnues,

$$4U^2 - 2(2a - 1)U + 2a^2 - 2a - 2 = 0.$$

78. — Résoudre le système :

$$\operatorname{tg} X + \operatorname{tg} Y + \operatorname{tg} Z = a,$$
$$\operatorname{tg}^2 X + \operatorname{tg}^2 Y + \operatorname{tg}^2 Z = b^2,$$
$$\operatorname{cotg} 2X + \operatorname{cotg} 2Y + \operatorname{cotg} 2Z = \frac{4 - a^2 + ab}{2(a - b)}.$$

On observe d'abord que

$$\operatorname{cotg} 2X = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 X}{2 \operatorname{tg} X}.$$

Posant, pour simplifier, $\operatorname{tg} X = x$, $\operatorname{tg} Y = y$, $\operatorname{tg} Z = z$; il vient

$$x + y + z = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2,$$
$$\frac{1 - x^2}{x} + \frac{1 - y^2}{y} + \frac{1 - z^2}{z} = \frac{4 - a^2 + ab}{a - b}.$$

Les deux dernières peuvent s'écrire

$$a^2 - 2\Sigma xy = b^2,$$
$$\Sigma xy - axyz = \frac{4 - a^2 + ab}{ab} xyz;$$

d'où $$\Sigma xy = \frac{a^2 - b^2}{2}, \qquad xyz = \frac{(a^2 - b^2)(a - b)}{8}.$$

Ainsi, x, y, z sont les racines de

$$U^3 - aU^2 + \frac{a^2 - b^2}{2} U - \frac{(a^2 - b^2)(a - b)}{8} = 0.$$

Cette équation admet la racine : $U = \frac{a - b}{2}$.

Les deux autres racines sont données par

$$4U^2 - 2(a + b)U + a^2 - b^2 = 0.$$

79. — Soient $a + b + c = 0$;

$$\frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} + \frac{1}{c^m} = \sum \frac{1}{a^m}, \qquad a^n + b^n + c^n = \Sigma a^n,$$

Démontrer que l'on a

1° $$\sum \frac{1}{a} = -\frac{3}{2} \frac{\Sigma a^2}{\Sigma a^3},$$

2° $$\sum \frac{1}{a^2} = \left(\sum \frac{1}{a}\right)^2.$$

3° $$\sum \frac{1}{a^3} = \frac{9}{\Sigma a^3} + \left(\sum \frac{1}{a}\right)^3,$$

4° $$\sum \frac{1}{a^4} = \frac{3\Sigma \frac{1}{a}}{\Sigma a^3} + \sum \frac{1}{a} \sum \frac{1}{a^3}.$$

Démontrer, à ce propos, la formule de récurrence :

$$\sum\frac{1}{a^m}=\frac{3}{\sum a^3}\cdot\sum\frac{1}{a^{m-3}}+\sum\frac{1}{a}\sum\frac{1}{a^{m-1}}.$$

80. — Si l'on suppose

$$a+b+c+d=0,$$

on a aussi :

1°
$$\sum\frac{1}{a}=\frac{8\sum a^3}{3[(\sum a^2)^2-2\sum a^4]},$$

2°
$$abcd\sum\frac{1}{a^2}=\sum a^2+\frac{1}{3}\sum a^3\sum\frac{1}{a},$$

et, en général :

$$\frac{1}{8}[(\sum a^2)^2-2\sum a^4]\sum\frac{1}{a^m}=\frac{1}{2}\sum a^2\sum\frac{1}{a^{m-2}}+\frac{1}{3}\sum a^3\sum\frac{1}{a^{m-1}}-\sum\frac{1}{a^{m-4}}$$

(A suivre.)

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

SESSION DE NOVEMBRE 1887

ACADÉMIE DE NANCY

1. — Définition d'un polyèdre. — Définition d'un polyèdre convexe — Définition des polyèdres semblables. — Énoncer, sans démonstration les théorèmes classiques sur les polyèdres semblables, et démontrer celui qui est relatif au rapport des volumes de deux polyèdres semblables.

2. — 1° Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, toute parallèle à cette droite est perpendiculaire à ce plan.

2° Étant donnée une circonférence dont on désignera le rayon par R, on considère deux diamètres rectangulaires; d'un point A pris sur l'un d'eux à une distance du centre OA $= a$, on mène la tangente AB qui coupe l'autre diamètre au point B. Connaissant R et la distance OA, calculer la surface totale du cône engendré par le triangle OAB tournant autour de OA. Étudier comment varie cette surface quand on fait varier la distance a.

3. — 1° Calculer sin a et cos a en fonction de sin a.

2° Inscrire à une sphère de rayon R, un cylindre dont la surface totale soit égale à $2\pi m R^2$, m étant un nombre donné. On discutera la solution trouvée et on expliquera les résultats de cette discussion.

4. — 1° A un triangle isoscèle ABC, où AB = BC, inscrire un rectangle maximum.

2° Simplifier l'expression :

$$\frac{a^3}{(a-b)(c-a)} + \frac{b^3}{(b-c)(a-b)} + \frac{c^3}{(c-a)(b-c)}.$$

3° 1° Définition de l'écliptique; 2° Mouvement elliptique du soleil; 3° Loi des aires; 4° Saisons, démontrer leur inégalité.

5. — 1° Démontrer que, dans tout angle trièdre, une face quelconque est plus petite que la somme des deux autres.

2° Démontrer que la somme des faces d'un angle polyèdre convexe est moindre que 4 angles droits.

3° On donne $tg\ a$, trouver $tg\ 4a$. — Réciproquement, connaissant $tg\ a$, calculer $tg\ \frac{a}{4}$.

BIBLIOGRAPHIE

Éléments de statique graphique, appliquée à l'équilibre des systèmes articulés; par M. Arthur Thiré, ancien élève de l'École Polytechnique. — Paris, Librairie Polytechnique, Baudry et Cie, éditeurs, 15 rue des Saints-Pères; maison à Liège, rue Lambert-Lebègue, 19; 1888. 1 vol. in-8° de 70 pages, avec atlas de 18 planches.

La statique graphique a été appliquée à toutes les questions de résistance qui concernent la Science des constructions, mais ces applications n'ont guère pénétré dans la pratique courante des bureaux d'ingénieurs qu'en tant qu'elles se rapportent aux systèmes articulés. C'est, à la vérité, là le véritable terrain de la Statique graphique; c'est là que les services qu'elle rend sont le plus appréciables. Les principes sur lesquels repose ce genre d'application sont très simples, et il suffit d'une étude des plus sommaires pour s'en rendre maître ; encore y faut-il un guide. Ce guide, M. Arthur Thiré le met à notre disposition sous forme d'un mince volume accompagné d'un atlas de planches, qui contient juste ce qu'il faut, et rien que ce qu'il faut. Bien des personnes à qui la connaissance des principes élémentaires de la Statique graphique serait fort utile, sont rebutées par la lecture des Traités très complets, très savants (et très utiles aussi, ajoutons-le, à ceux qui ont fait de fortes études) qui ont été consacrés à la matière; mais trop développés, trop difficiles à comprendre pour ceux qui n'ont qu'une éducation mathématique élémentaire. A cet égard, le petit livre de M. Thiré est appelé à rendre de réels services, et nous nous estimerions heureux de pouvoir contribuer à le répandre.

Il se divise en deux parties; la première consacrée aux principes, la seconde aux applications.

La façon dont M. Thiré expose les principes est à la fois d'une très grande simplicité et d'une parfaite clarté. L'auteur observe que les conditions d'équilibre d'un système articulé quelconque se traduisent

par la possibilité de construire une certaine figure qu'il appelle *figure représentative* de l'équilibre du système articulé. Il effectue la détermination de ces figures représentatives, d'abord pour un point, puis pour une barre, puis pour les divers genres de systèmes articulés. Ce n'est là, au fond, autre chose que la théorie des figures réciproques de Crémona, mais présentée à un point-de-vue nouveau et tout-à-fait élémentaire. M. Thiré a eu, en outre, l'idée d'une très heureuse innovation, qui consiste à représenter les forces extérieures au moyen de traits rouges. Les figures y gagnent beaucoup en netteté. Quant aux pièces tendues ou comprimées, elles sont distinguées par la grosseur du trait, fin pour les premières, épais pour les secondes.

Les applications traitées dans la seconde partie sont bien choisies et embrassent tous les cas usuels de la pratique.

Dans un court appendice, qui termine le volume, l'auteur montre avec quelle facilité la considération de la figure représentative de l'équilibre d'un système articulé ouvert permet d'obtenir l'équation différentielle de la *chaînette.*

En somme, le petit ouvrage de M. Thiré nous semble bien fait pour atteindre le but que s'est proposé l'auteur : mettre rapidement les personnes qui n'ont que des connaissances élémentaires en mathématiques à même d'utiliser les principes de la Statique graphique pour les problèmes où leur emploi est le plus efficace. Ajoutons que le livre est bien imprimé et l'atlas très soigné.

Ce petit ouvrage est, sans doute, appelé à devenir rapidement classique.

M. d'O.

QUESTIONS 226 ET 253

Solution et généralisation, par M. Cotoni, au Lycée d'Alger.

On donne une circonférence de diamètre AB*; deux points* C *et* D *sur la circonférence, de part et d'autre de* AB. *Du milieu* E *de* CD *on mène* EF *perpendiculaire sur* AC *et* EG *perpendiculaire sur* AD. *Démontrer que*

(A) $$BC \cdot EF + BD \cdot EG = 2\overline{CE}^2 \quad (*) \qquad \text{(Griess.)}$$

1° **Solution.** — Soit BH perpendiculaire sur CD. Les deux triangles rectangles BCH, CEF sont semblables, puisque leurs angles en C sont complémentaires. Donc

$$\frac{BC}{CE} = \frac{CH}{EF};$$

d'où

(1) $$BC \cdot EF = CE \cdot CH$$

(*) L'énoncé portait, par une erreur d'impression, $2CD^2$.

Les triangles BDH et EGD donnent, pour la même raison,

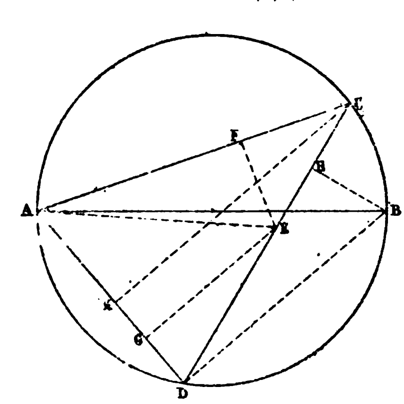
(2) $$BD \cdot EG = ED \cdot HD.$$

Par suite,

$$BC \cdot EF + BD \cdot EG = CE(CH + HD) = 2\overline{CE}^2 = \frac{\overline{CD}^2}{2}.$$

2° **Généralisation** (*). — Soit E un point pris sur CD et tel que

$$\frac{DE}{CE} = n.$$



Les triangles AEC, ADE ont même hauteur et leurs bases sont sur la même droite; donc

Surf. ADE $= n$. surf. AEC.

ou

$$AD \times GE = n \times AC \times EF,$$

et, par suite,

$$\frac{AD}{EF} = \frac{AC}{\left(\frac{GE}{n}\right)}.$$

Soit CK la perpendiculaire abaissée du point C sur AD. On a

$$\frac{CK}{EG} = \frac{CD}{DE} = \frac{n + 1}{n},$$

d'où $$CK = \frac{n + 1}{n} \cdot GE.$$

Le triangle ACD donne, en désignant par 2R le diamètre de AB,

$$AC \times CD = 2R \times CK = 2R \cdot \frac{n + 1}{n} \cdot GE.$$

Donc

(3) $$\frac{AD}{EF} = \frac{AC}{\frac{GE}{n}} = \frac{2R}{\frac{CD}{n + 1}}.$$

D'autre part, le quadrilatère inscriptible ABCD donne l'égalité

$$AC \cdot BD + AD \cdot BC = 2R \cdot CD.$$

Cette relation est homogène par rapport aux quantités AC,

(*) Cette généralisation donne la solution de la question 253, proposée par M. G. Russo (*Journal*, 1887, p. 168).

AD et 2R; donc, en vertu des proportions (3), on a

$$BD \cdot \frac{GE}{n} + BC \cdot EF = \frac{\overline{CD}^2}{n+1}.$$

En faisant $n = 1$, on retombe sur la relation proposée (A).

Remarque. — Si les points C, D étaient pris du même côté de AB, le même raisonnement conduirait à la relation

$$BC \cdot EF - BD \cdot \frac{EG}{n} = \frac{\overline{CD}^2}{n+1}.$$

Solutions diverses par MM. Henry Galopeau, à Beaulieu (Charente); l'abbé E. Gelin, professeur au collège Saint-Quirin, à Huy (Belgique); Alexandre Couvert, au lycée Condorcet; E. Quintard, suppléant au collège Chaptal; A. Boutin, professeur au collège de Courdemanche (Sarthe); René-Henri Martin, élève au lycée Condorcet (classe de M. Brisse); G. Russo, à Catanzaro; Sauvage, professeur à Saint-Pol; Ignacio Beyens, capitaine du génie, à Cadix (Espagne); Alexandre Couvert, au lycée Condorcet; A. Latif Séfa, à Constantinople.

QUESTIONS 227 ET 262

Solution par M. H. X.

Étant donnée une parabole de foyer F, *on considère la perpendiculaire à l'axe passant au foyer et coupant la parabole en* A *et* B; *par ces points, on mène des parallèles à l'axe* ΔΔ'. *Soit* M *un point de la parabole. On trace* AM, BM *qui coupent* Δ, Δ *en* H, K. *Enfin* HK *coupe* AB *en* I, *et l'on projette* M *en* C *sur* AB. *Démontrer que :*

1° *Le cercle* ABM *est coupé par* CM *en un point dont le lieu est une droite.* Soit E ce point;

$CE.CM = CA.CB = (AF - CF)(AF + CF) = \overline{AF}^2 - \overline{CF}^2 = 2p.CM$ donc $CE = 2p$. Le lieu de E est une perpendiculaire à l'axe.

2° AH + BK = *const.*

Des proportions

$$\frac{AH}{MC} = \frac{AB}{CB}; \quad \frac{BK}{MC} = \frac{AB}{CA}$$

on tire $$AH + BK = \frac{MC.\overline{AB}^2}{CA.CB},$$
mais CA.CB $= 2p$.MC et AB $= 2p$, donc
$$AH + BK = 2p.$$

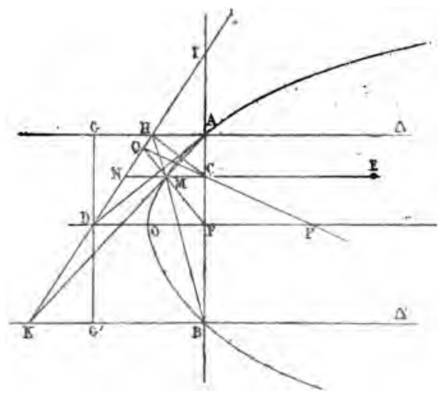
3° HK *passe par un point fixe* D.

HK coupe l'axe en un point D tel que
$$FD = \frac{AH + BK}{2} = p,$$
donc D est fixe.

4° *Le cercle* DIC *est tangent à l'axe, en un point fixe.*

Les points C, I sont conjugués harmoniques de A et B, car
$$\frac{IB}{IA} = \frac{BK}{AH} = \frac{CB}{CA},$$
d'où $$FC.FI = \overline{AF}^2 = \overline{FD}^2.$$

Le cercle DIC est donc constamment tangent à l'arc en D.



5° *Les cercles qui ont leur centre sur* HK *et passent par* HC, IC *sont orthogonaux.*

Soit G l'intersection avec Δ d'une parallèle à AB menée par D. On a
$$GH = \frac{BK - AH}{2}$$
$= CF$ (voir 9°), d'où $AH = AC$; AD est par suite perpendiculaire à CH, en son milieu, et D est le centre du cercle passant par H, C.

Le point N, l'intersection de MC et de HC, appartient au cercle passant par IC.

Comme $$\frac{DN}{FC} = \frac{DI}{FI} = \frac{DH}{AF},$$
on a $$DN.DI = \overline{DH}^2,$$
ce qui démontre la proposition énoncée.

6° *L'axe radical de ces cercles passe par un point fixe.*

Cet axe, perpendiculaire abaissée de C sur HK coupe l'axe en P et l'on a

$$\frac{FP}{FI} = \frac{FC}{FD},$$

d'où

$$FP = \frac{FC.FI}{FD} = FD = p,$$

donc P est fixe.

7° *Cet axe radical et les droites* MF *et* HK *concourent.*

On a

$$\frac{MN}{AH} = \frac{KM}{KA} = \frac{BC}{BA} = \frac{MC}{AH};$$

d'où MN = MC; F étant, d'ailleurs, le milieu de DP, il s'ensuit que MF passe par l'intersection Q de HK et de l'axe radical en question.

8° HK *est parallèle à la tangente en* M.

Le triangle MNQ est semblable à FDQ; ses angles MQN, QNM sont égaux, ce qui démontre la proposition.

9° AH − BK = 2CF.

On a $AH - BK = MC.AB\left(\frac{1}{BC} - \frac{1}{AC}\right) = 2CF,$

car $AC - BC = 2CF$ et $BC.AC = MC.AB.$

Autres solutions par MM. A. Troille, élève au lycée de Grenoble; Alphonse Dumoulin, élève de première année à l'école normale des Sciences de Gand (Belgique).

M. Dumoulin ajoute, aux questions proposées, diverses remarques, conséquences immédiates des propriétés de la figure étudiée dans cet exercice.

QUESTION 231

Solution par A. Boutin, professeur au Collège de Courdemanche.

Lorsqu'un cercle mobile Δ *passe par le centre de gravité d'un triangle* ABC, *la somme des puissances des points* A, B, C, *par rapport à* Δ, *est constante et égale à*

$$\frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{3}.$$

Demontrer cette propriété et la généraliser. (G. L.)

Soient O, R le centre et le rayon de Δ. On a :

puissance de A = $AO^2 - R^2$,

puissance de B = $BO^2 - R^2$,

puissance de $C = CO^2 - R^2$,
somme des puissances $= AO^2 + BO^2 + CO^2 - 3R^2$.

Mais, d'après un théorème connu :

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3R^2;$$

G étant le centre de gravité de ABC.

Par conséquent, la somme des puissances$=AG^2+BG^2+CG^2$.

Mais un autre théorème connu donne :

$$AG^2 + BG^2 + BG^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2);$$

C. Q. F. D.

Généralisation. — *Si l'on considère une sphère mobile* Δ *qui passe par le centre de gravité* G *de* n *points quelconques de l'espace* $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$; *la somme des puissances des points* $A_1 \ldots A_n$, *par rapport à* Δ, *est constante et égale à* $\frac{1}{n}$ *de la somme des carrés des distances des points considérés pris deux à deux, de toutes les manières possibles.*

Pour démontrer cette proposition, nous allons établir, comme lemme préliminaire, le théorème suivant :

La somme des carrés des distances du centre de gravité de n *points de l'espace, à ces points, est égale à la* n^e^ *partie de la somme des carrés des distances de ces points, pris deux à deux.*

Soient : A_k. A_i deux points quelconques, δ leur distance, x_i, y_i. z_i les coordonnées du point A_i par rapport à trois axes rectangulaires.

On a

$$\delta^2 = \overline{A_kA_i}^2 = (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2.$$

Il y a $n - 1$ droites issues d'un point quelconque; donc

(1) $\Sigma\delta^2=(n-1)[\Sigma x_i^2+\Sigma y_i^2+\Sigma z_i^2]-2\Sigma x_ix_k-2\Sigma y_iy_k-2\Sigma z_iy_k$.

Supposons que le centre de gravité du système de points soit l'origine des coordonnées; alors

$$A_iG^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2,$$
$$\Sigma A_iG^2 = \Sigma x_i^2 + \Sigma y_i^2 + \Sigma z_i^2,$$
$$\Sigma x_i = 0, \qquad \Sigma y_i = 0, \qquad \Sigma z_i = 0;$$

d'où, élevant au carré :

$$\Sigma x_i^2 + \Sigma 2x_ix_k = 0, \qquad - 2\Sigma x_ix_k = \Sigma x_i^2,$$
$$\Sigma y_i^2 + \Sigma 2y_iy_k = 0, \qquad - 2\Sigma y_iy_k = \Sigma y_i^2,$$
$$\Sigma z_i^2 + \Sigma 2z_iz_k = 0, \qquad - 2\Sigma z_iz_k = \Sigma z_i^2.$$

Substituant dans (1), on a enfin

$$\Sigma\delta^2 = n[\Sigma x_i^2 + \Sigma y_i^2 + \Sigma z_i^2] = n\Sigma A_iG^2.$$

Ceci posé, revenons au théorème en question :

$$\Sigma \text{ Puissance } A_i = \Sigma A_iO^2 - nR^2.$$

Mais d'après un théorème connu, sur les centres de gravité :

$$\Sigma A_iO^2 = \Sigma A_iG^2 + nR^2.$$

Donc $$\Sigma \text{ Puissance } A_i = \Sigma A_iG^2 = \frac{1}{n}\Sigma\delta^2$$

C. Q. F. D.

Dans le plan, le théorème prend la forme suivante, plus simple, mais moins générale :

Si un cercle Δ *est mobile et passe par le centre de gravité d'un polygone convexe de* n *côtés,* n *fois la somme des puissances des sommets du polygone, par rapport à* Δ, *est égale à la somme des carrés des côtés du polygone, plus la somme des carrés de ses diagonales.*

Solutions diverses par Henry Galopeau, lycée d'Angoulême; Ignacio Beyens, capitaine du génie, à Cadix (Espagne); René-Henri Martin, élève au lycée Condorcet.

QUESTION 234

Solution par M. l'abbé E. Gelin, professeur au Collège Saint-Quirin à Huy.

Montrer que la somme des surfaces de tous les triangles formés, chacun, avec les médianes du précédent, le triangle ABC *étant le premier d'entre eux, a pour limite le quadruple de la surface de ce triangle* ABC. (G. Russo.)

Soient S, S_1, S_2, S_3, ... les surfaces du triangle ABC et des triangles formés chacun avec les médianes du précédent. Si l'on appelle m, m', m'' les médianes issues des sommets A, B, C, on a

$$m^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2), \quad m'^2 = \frac{1}{4}(2c^2 + 2a^2 - b^2),$$

$$m''^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2),$$

d'où en substituant dans la formule

$$S_1 = \frac{1}{4}\sqrt{4m^2m'^2 - (m^2 + m'^2 - m''^2)}:$$

$$S_1 = \frac{3}{16}\sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2} = \frac{3}{4}S.$$

Les surfaces S, S_1, S_2, S_3, ... forment donc une progression géométrique décroissante, dont la raison est $\frac{3}{4}$; la somme de ces surfaces a donc pour limite

$$\frac{S}{1 - \frac{3}{4}} = 4S.$$

Solutions diverses par MM. J. Chapron, à Bragelogne; Dareau, maître interne au collège de Clamecy (Nièvre); René-Henri Martin élève au lycée Condorcet (classe de M. Brisse); C. Thiéry, à Condé-sur-Escaut; E. Quintard à Arbois; Ignacio Beyens, capitaine du génie, à Cadix (Espagne).

QUESTIONS PROPOSÉES

288. — Soient A, C deux sommets opposés d'un rectangle ABCD; la perpendiculaire abaissée de C sur BD rencontre la bissectrice de BAD en P; démontrer que CP = CA (*).

(*G. L.*)

289. — Sur les côtés d'un triangle FGL, on prend FK = f, GI = g; puis on trace les perpendiculaires KN, IN à ces côtés. Prouver que

$$\overline{LN}^2 = \frac{1}{\sin^2 L}[f^2 + g^2 + l^2 - 2gl\cos G - 2fl\cos F - 2fg\cos L]$$

(*Catalan.*)

ERRATUM. — Question 286, p. 168, ligne 5 ; *au lieu de* L, *lisez* 4.

(*) De cette remarque élémentaire on peut déduire comme l'a fait le professeur R. H. Graves (*Annals of Mathematics*, avril 1888) cette propriété connue : *la développée de l'hypocycloïde à quatre rebroussements est aussi une hypocycloïde à quatre rebroussements.*

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMIN DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 16120-7-8.

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1888 (*)

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Solution par M. LEVAVASSEUR, professeur au Lycée de Moulins.

Soient deux points A *et* A′ *et deux droites* D *et* D′ *parallèles à* AA′, *et équidistantes de cette droite.* 1° *Démontrer qu'à tout point pris sur la droite* D *correspond un point* P′, *pris sur la droite* D′, *tel que la droite* PP′ *soit tangente aux cercles* S *et* S′ *circonscrits l'un au triangle* PAA′, *l'autre au triangle* P′AA′. 2° *Trouver le lieu décrit par la projection de chacun des points* A *et* A′ *sur la droite* PP′. 3° *Construire les droites* PP′ *qui passent par un point donné* P. 4° *Démontrer que les cercles* S *et* S′ *se coupent sous un angle constant.* 5° *Soit* O *le milieu du segment* AA′, *étudier les variations de l'angle* POP′.

1° Prenons sur la droite D un point P; traçons la circonférence PAA′, et la tangente en P à cette circonférence. Elle rencontre D′ en P′; je dis que la droite PP′ est tangente, en P′, à la circonférence P′AA′.

En effet, la droite AA′ rencontre PP′ en son milieu ω, et l'on a

$$\overline{\omega P}^2 = \overline{\omega P'}^2 = \omega A . \omega A'.$$

Ainsi, à un point P ne correspond qu'un point P′; réciproquement, si l'on part du point P′ on retombe sur le point P. Donc les points P et P′ décrivent deux divisions homographiques, et si la droite D′ coïncidait avec D, de manière que B′ vînt en B, les deux divisions seraient en involution; comme au point B correspond sur D′ le point à l'infini, le point B serait le point central de cette involution. C'est dire que le produit BP.BP′ est constant.

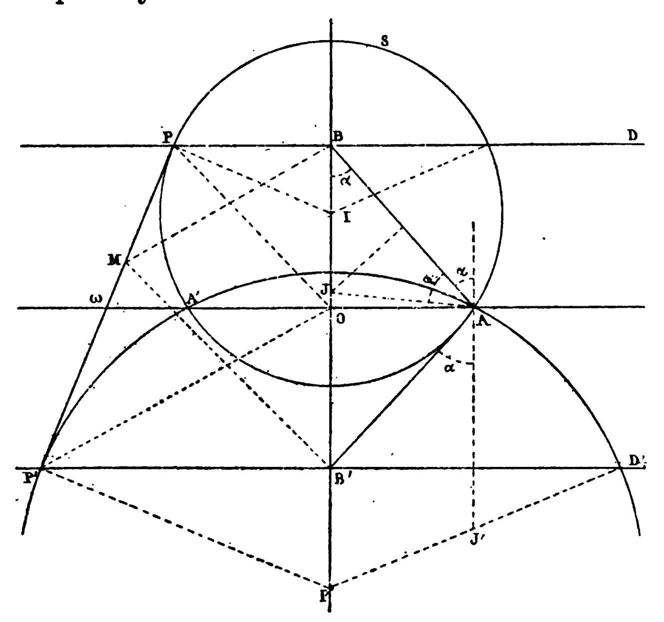
Pour en trouver la valeur, supposons que les circonférences

(*) Nous avons reçu une autre solution de M. Em. Borel, élève au lycee Louis-le-Grand (Sainte-Barbe).

S et S′ soient égales. Elles ont alors pour centres B et B′, et leur rayon est $BA' = B'A' = a$. On a donc

$$PB.P'B' = a^2.$$

2° La droite PP′, qui joint les points correspondants de deux divisions homographiques, a pour enveloppe une ellipse E dont les sommets du petit axe sont B et B′, et dont A et A′ sont les foyers. Le lieu des projections de A et de A′ sur PP′ est donc la circonférence décrite du point O comme centre, avec a pour rayon.



3° Mener, par un point donné Q, deux droites telles que PP′, revient à mener, par le point Q, deux tangentes à l'ellipse E, connaissant les foyers et les axes. On appliquera la construction connue.

On peut encore observer que les faisceaux QP, QP′ sont deux faisceaux en involution, et que les droites, telles que PP′, cherchées, sont les rayons doubles de cette involution; on appliquera donc la construction connue.

Les deux droites seront réelles et distinctes si le point Q est extérieur à l'ellipse E; réelles et confondues si le point Q est sur l'ellipse E; imaginaires si le point Q est à l'intérieur de l'ellipse E.

4° Puisqu'à une circonférence S ne correspond qu'une circonférence S', les centres I et I' décrivent deux divisions homographiques de même base, lesquelles ont des points doubles imaginaires, puisque le point P, ne pouvant coïncider avec P', les circonférences S et S' ne peuvent coïncider. D'ailleurs le point O est évidemment le milieu des points limites. Il existe donc, sur AA', deux points fixes d'où l'on voit tous les couples (II') sous un angle constant. Pour faire voir que ces points fixes sont précisément les points A et A', il suffit de montrer que, du point A par exemple, on peut voir trois couples (II') sous le même angle. Comme premier couple, nous choisirons BB'. Comme deuxième couple choisissons le centre J de la circonférence passant par AA'B, le point correspondant J' est à l'infini, et l'on a $\widehat{JAJ'} = \widehat{BAB'}$, ceci résulte des angles marqués α sur la figure. Je choisirai, pour troisième couple, le deuxième point limite et le point à l'infini sur BB'. L'angle des deux circonférences I et I' étant le supplément de l'angle $\widehat{IAI'}$, le théorème est démontré.

5° Soit M le point de contact de PP' avec son enveloppe. l'ellipse E. OP passe au milieu de BM, OP' passe au milieu de B'M : OP et OP' sont donc deux diamètres conjugués de l'ellipse E (*). On en connaît les variations; quand P coïncide avec B, il est droit; quand BP varie de zéro à a, l'angle θ décroît jusqu'à un minimum θ_0, tel que $\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2} = \frac{b}{a}$, $(OB = b)$. Quand BP varie de a jusqu'à $+\infty$, θ varie de θ_0 à $\frac{\pi}{2}$.

(*) L'angle considéré est donc l'angle aigu de deux diamètres conjugués.

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. G. de Longchamps.

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 169.)

---

90. Solution générale.— Mais aucune des solutions pré cédentes ne résout complètement la question précédente, posée dans les termes suivants : *Un triangle inaccessible, de dimensions quelconques, dont les sommets supposés visibles peuvent être très éloignés, étant considéré ; trouver l'aire de ce triangle, si restreint que soit le terrain accessible.*

Première solution. — C'est à la méthode d'inversion que nous aurons d'abord recours pour résoudre le problème qui, dans ces conditions, offre, dans l'ordre pratique, certaines difficultés.

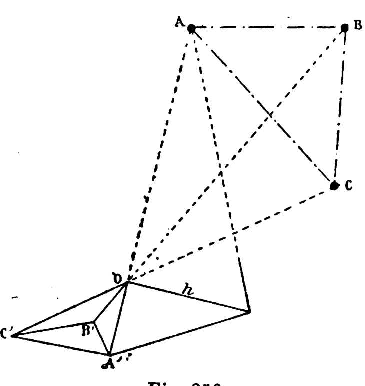


Fig. 256.

Nous avons expliqué précédemment, et la figure 256 rappelle la construction nécessaire, comment, un point A étant visible, on déterminait le point inverse A', de telle sorte que

$$OA.OA' = h^2.$$

Soient, de même, B' et C' les inverses des points B, C ; nous aurons, d'abord,

$$OA.OA' = OB.\ OB' = OC.OC' = h^2.$$

Les triangles OAB, OA'B, ayant un angle égal, donnent

$$\frac{OAB}{OA'B'} = \frac{OA.OB}{OA'.OB'} = \frac{h^4}{\overline{OA'}^2\,\overline{OB'}^2}.$$

On trouve, de même :

$$\frac{\mathrm{OBC}}{\mathrm{OB'C'}} = \frac{h^4}{\overline{\mathrm{OB'}}^2\,\overline{\mathrm{OC'}}^2}, \qquad \frac{\mathrm{OCA}}{\mathrm{OC'A'}} = \frac{h^4}{\overline{\mathrm{OC'}}^2\,\overline{\mathrm{AO'}}^2}.$$

Mais $\mathrm{ABC} = \mathrm{OAB} + \mathrm{OBC} - \mathrm{OAC}$;

on a donc

$$\mathrm{ABC} = \frac{h^4}{\overline{\mathrm{OA'}}^2.\overline{\mathrm{OB'}}^2.\overline{\mathrm{OC'}}^2}\left\{\overline{\mathrm{OC'}}^2.\mathrm{OA'B'} + \overline{\mathrm{OA'}}^2.\,\mathrm{OB'C'} - \overline{\mathrm{OB'}}^2.\mathrm{OA'C'}\right\}.$$

Cette formule résout la question posée. On observera que, en prenant h suffisamment petit, la figure OA'B'C' est aussi petite que l'on voudra, la solution indiquée est donc générale; aucune difficulté matérielle ne peut empêcher sa réalisation, si les points A, B, C considérés sont visibles, à la fois, d'un point convenablement choisi dans la région accessible.

SECONDE SOLUTION. — La solution que nous allons maintenant exposer est certainement plus simple; mais elle exige la connaissance d'une formule précédemment établie (*Première partie*, § **8**).

Soit ABC le triangle proposé ; nous le supposerons d'ailleurs aussi grand et aussi éloigné que l'on voudra.

Nous ferons d'abord observer que, un point A inaccessible, appartenant à une certaine droite PQ, étant considéré, il est très facile d'obtenir le conjugué harmonique de A, relativement au segment PQ. Il suffit, en effet, de jalonner mm'', parallèlement à OA et, avec un cordeau, de prendre m', milieu de mm''. Om' va couper PQ au point cherché A'.

Cela posé, voici quel est le principe de la méthode en question.

Jalonnons, dans la région accessible, trois alignements quelconques $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ pasants respectivement par les points A, B, C; puis, déterminons les points A', B', C', conjugués harmoniques de A, B, C, sur les segments $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$. On connait alors la valeur de chacun des rapports u, v, w :

Fig. 257.

$$u = \frac{\mathrm{A'}\gamma}{\mathrm{A'}\beta}, \qquad v = \frac{\mathrm{B'}\alpha}{\mathrm{B'}\gamma}, \qquad w = \frac{\mathrm{C'}\beta}{\mathrm{C'}\alpha};$$

lesquels sont égaux, respectivement, à

$$u = \frac{A\gamma}{A\beta}, \quad v = \frac{B\alpha}{B\gamma},$$
$$w = \frac{C\beta}{C\alpha}.$$

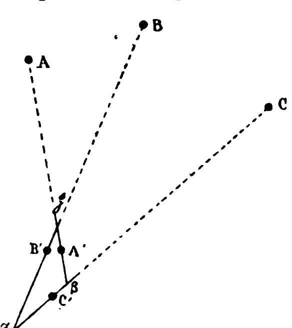


Fig. 258.

Il n'y a plus alors qu'à appliquer la formule, rappelée tout à l'heure,

$$\text{aire}\,ABC = \text{aire}\,\alpha\beta\gamma\,\frac{1 - uvw}{(1-u)(1-v)(1-w)}.$$

La construction indiquée pour déterminer le triangle A′B′C′ comporte une vérification intéressante parce que les droites B′A′, C′B′, A′C′ passent respectivement par C, A, B.

Remarque. — Dans le cas où l'aire inaccessible est enclavée dans la région accessible, on pourrait utiliser le théorème établi au paragraphe 5 de la première partie; mais, dans un pareil cas, les espaces inaccessibles considérés étant de faible étendue, la méthode élémentaire, bien connue, résout la question avec plus de simplicité. Nous rappelons seulement que cette méthode consiste à envelopper la partie inaccessible d'une ligne polygonale θ, choisie aussi simplement que possible; on calcule l'aire inaccessible en retranchant, de l'aire du polygone considéré, celle de la partie comprise entre θ et la périphérie de la région inaccessible.

91. — Examen du cas où les trois points ne sont pas visibles simultanément. — Ce que nous avons dit, en terminant l'exposition de la première de deux solutions développées au paragraphe précédent, nous conduit à l'examen d'une difficulté. On peut supposer que les trois points, sommets du triangle inaccessible, ne sont pas visibles, à la fois, pour l'observateur se déplaçant dans la région restreinte d'où il ne peut sortir. Nous allons montrer comment on pourrait opérer, dans ce cas.

On voit d'abord que toute la question est ramenée à celle-ci : *Un point* A *est supposé inaccessible; de plus, il est invisible pour l'observateur placé en* O; *trouver l'inverse de* A, *par rapport à* O.

Soient O′ et O″ deux points d'où l'on aperçoit A; on peut d'abord déterminer les inverses α, α' de A, par rapport aux pôles O′ et O″; on peut aussi, bien que A ne soit pas visible du point O, jalonner par les procédés que nous avons fait connaître (§, **32** fig. 170) la direction Oz de la ligne de visée OA, ligne qu'on ne peut obtenir directement, puisque A est caché par l'obstacle U.

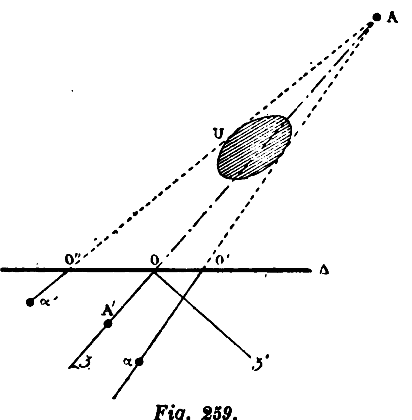


Fig. 259.

Cela posé, le théorème de Stewart (*), appliqué au triangle AO′O″, donne

$$\overline{AO}^2.O'O'' = \overline{AO''}^2.OO' + \overline{AO'}^2.OO'' - OO'.OO''.O'O''.$$

Mais $\quad AO''.O''\alpha' = AO.OA' = AO'.O'\alpha = h^2$;

et, par conséquent,

$$\frac{O'O''}{\overline{A'O}^2} = \frac{OO'}{\overline{O''\alpha'}^2} + \frac{OO''}{\overline{O'\alpha}^2} - \frac{OO'.OO''.O'O''}{h^4}.$$

Cette égalité permettra de calculer A′O; par suite le point A′ se trouve déterminé.

Remarque. — Le plus souvent on pourra prendre h assez grand pour que l'observateur placé sur la droite Oz' perpendiculaire à Oz, puisse apercevoir le point A; dans ce cas, la détermination de A′ se fait par un coup d'équerre. Mais cette solution est soumise à objection, si l'on exige que h soit très petit, condition que nous nous sommes imposée en abordant tout à l'heure la solution générale. La détermination de OA′, telle que nous venons de l'indiquer, peut, au contraire, être effectuée, si petit que soit h; de là, malgré sa complication, l'intérêt que comportent les développements du para-

(*) Matthew Stewart's (*Some general Theorems of considerable use in the higher parts of Mathematics*, 1746, prop. II).

graphe précédent, intérêt qui n'apparaîtrait peut-être pas immédiatement, sans cette explication.

92. Distance d'un point inaccessible A, à une droite Δ, inaccessible. — PREMIÈRE SOLUTION. — On suppose que Δ est déterminée par deux points B, C, visibles,

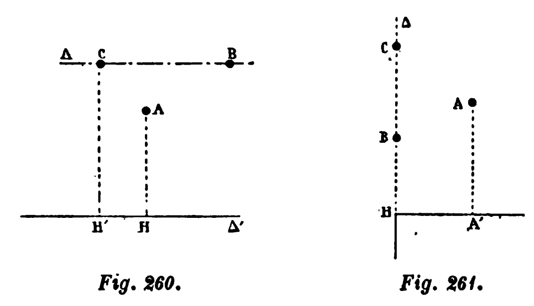


Fig. 260. *Fig. 261.*

mais inaccessibles. On détermine : 1° la longueur BC ; 2° l'aire S de ABC. Cela fait, la distance inconnue AH est donnée par la formule

$$AH = \frac{2S}{BC}.$$

SECONDE SOLUTION. — On trace, dans la région accessible, une droite Δ' parallèle à Δ. En mesurant, par l'un des procédés que nous avons fait connaître, les distances CH et AH', leur différence donne la longueur cherchée.

Il faut supposer, bien entendu, que le prolongement de Δ ne pénètre pas dans la région accessible ; autrement, la difficulté que nous venons de résoudre n'existerait même pas. En cherchant la projection A', de A, sur la ligne perpendiculaire à Δ, la longueur A'H est égale à la distance demandée.

93. Déterminer le point de concours de deux droites inaccessibles. — Deux droites Δ, Δ' déterminées, chacune, par deux points visibles :

A, α, pour Δ ; B, β, pour Δ' ;

étant inaccessibles, on propose, par un point donné O, de jalonner un alignement allant concourir au point ω, commun ces deux droites ; on demande, aussi, de calculer la longueur $O\omega$.

Ayant visé, du point O, successivement, un point A de Δ et un point B de Δ', on pourra jalonner, dans la région accessible, les prolongements Ox, Oy de ces deux lignes OA, OB. Soit A'B' une parallèle à AB tracée, bien entendu, dans cette même région. Cela fait, on déterminera par les constructions qui ont été utilisées pour obtenir A'B', les droites δ, δ' paralèles à Δ et à Δ' et passant respectivement, par A' et par B'. Les triangles ωAB, ω'A'B' étant homothétiques, les droites qui joignent les sommets homologues sont concourantes, $\omega\omega'$ passe donc par le point O.

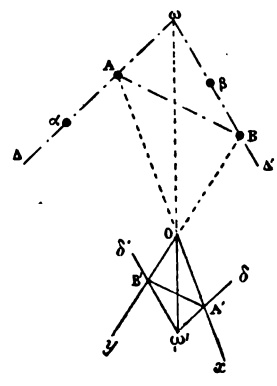


Fig. 262.

Après avoir déterminé la direction $O\omega$, si l'on veut avoir cette distance, on observera que

$$O\omega = \frac{OA}{OA'} O\omega'.$$

Il suffit donc, pour connaître $O\omega$ de calculer, comme nous savons d'ailleurs le faire, la distance du point O au point inaccessible A.

Cette solution est générale, parce que la figure $O\omega'$A'B' est aussi petite que l'on veut.

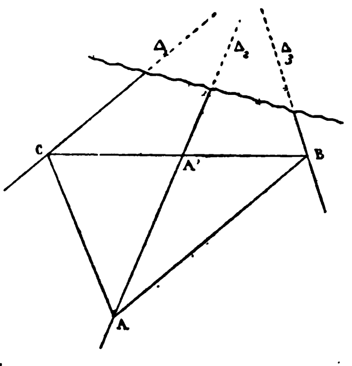


Fig. 263.

94. Les trois droites inaccessibles. — La figure constituée par trois droites inaccessibles soulève divers problèmes; mais, pour nous borner, nous envisager seulement le cas où les trois droites sont concourantes. Nous supposons donc que l'on considère trois droites inaccessibles $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ chacune d'elles étant supposée déterminée par deux points visibles. Dans ces conditions, on propose : 1° de reconnaître que ces droites sont con-

courantes; 2° de déterminer les angles qu'elles font deux à deux.

Cette seconde partie (que les droites en question soient, ou non, concourantes) peut être considérée comme déjà résolue, puisque nous avons appris précédemment, à mener, sur le terrain accessible, des parallèles à des droites inaccessibles. Nous nous bornerons, conséquent, à l'examen de la première partie.

1° Supposons d'abord, pour envisager le cas le plus facile, que les prolongements des droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 pénètrent dans la partie accessible du terrain. Ayant mené, par un point A, de Δ_2, des parallèles AB, AC aux droites Δ_1, Δ_3; si BC est partagé par Δ_2, au point A′, en deux parties égales, les droites considérées sont concourantes.

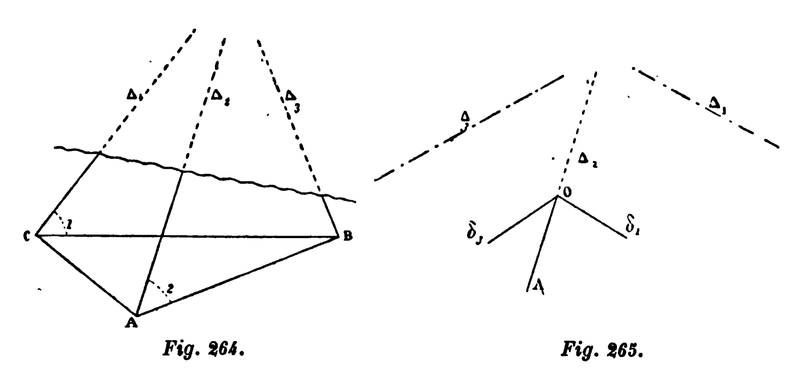


Fig. 264. *Fig. 265.*

Mais cette solution, que nous avons déjà utilisée dans le problème des percées concourantes, est, pour le cas présent, peu pratique, parce qu'elle nécessite des opérations exigeant une certaine étendue de terrain. En voici une autre qui nous paraît moins compliquée.

D'un point A, pris sur Δ_2 on abaisse des perpendiculaires AC, AB sur Δ_1 et Δ_3; si les angles $\widehat{1}$ et $\widehat{2}$ sont égaux, les trois droites concourent.

Le lecteur trouvera d'ailleurs, sans aucune peine, d'autres solutions de ce problème très simple; et, sans y insister davantage, nous allons examiner certains cas offrant plus de difficultés.

2° Imaginons, par exemple, que le prolongement de Δ_2, seul pénètre dans la région accessible.

Par un point O, pris sur le prolongement de Δ_2, on mènera des droites δ_1, δ_3 parallèles à Δ_1 et à Δ_3; on appliquera ensuite, aux trois droites δ_1, δ_3, et OA, l'une ou l'autre des vérifications indiquées tout à l'heure.

3° Admettons enfin qu'aucun des prolongements des droites considérées ne pénètre dans la région accessible, ce qui constitue le cas le plus général.

Si l'on peut viser, d'un certain point O de la région accessible des points A_1, A_2, A_3, d'une part; B_1, B_2, B_3, d'autre part; en ligne droite avec ce point O, et respectivement placés sur les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, on pourra calculer les distances de O à ces différents points et l'on devra vérifier que les rapports anharmoniques $(O,\ A_1A_2A_3)$, $(O,\ B_1B_2B_3)$, sont égaux.

Comme il serait pénible de calculer toutes ces distances, OA_1, OA_2 ...; OB_1, ..., on simplifie l'opération en visant, de deux points O′, O″, arbitrairement choisis d'ailleurs, les points A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3, et l'on coupe ces lignes de visée par deux transversales quelconques Ox, Oy.

On a:

$$(O,\ A_1A_2A_3) = (O,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3); \quad \text{et} \quad (O,\ B_1B_2B_3) = (O,\ \beta_1\beta_2\beta_3).$$

Par suite, si Δ_1, Δ_2, Δ_3 concourent,

$$(O,\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = O,\beta_1\beta_2\beta_3),$$

Ainsi les droites considérées concourent si les droites $\alpha_1\beta_1$. $\alpha_2\beta_2$, $\alpha_3\beta_3$ concourent elles-mêmes; et réciproquement.

Fig. 266.

On peut faire, à cette solution, une objection : les points A_1 et A_3 visibles sur Δ_1 et Δ_3, peuvent n'être pas en ligne droite avec un point

visible de Δ_2. Le problème que nous allons traiter, dans le paragraphe suivant, répond à cette objection et permet de considérer la solution précédente comme étant générale.

95. Déterminer le point de rencontre d'une ligne de visée avec une droite inaccessible. — Voici dans quels termes doit se poser la question que nous venons de soulever. Soit Δ_2 une droite inaccessible, déterminée par deux points visibles A,B. D'un point O part une ligne de visée Δ, et cette droite coupe AB en un point invisible K : on veut pour tant, d'un point donné O′, viser ce point K.

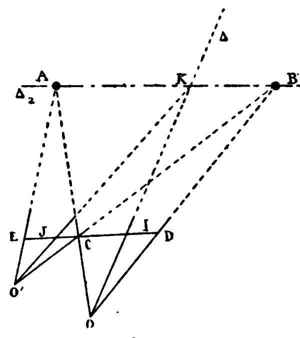


Fig. 267.

Jalonnons une parallèle à AB sur le terrain accessible; O′K rencontre cette droite en un point J; et nous avons

$$\frac{EJ}{JC} = \frac{AK}{KB} \quad \text{et} \quad \frac{CI}{DI} = \frac{AK}{KB},$$

par suite

$$\frac{EJ}{JC} = \frac{CI}{DI}.$$

Cette égalité permet de déterminer la position du point J; et, par conséquent, de fixer la position de la ligne de visée O′K. Cette détermination peut d'ailleurs s'effectuer, sans chaînages et sans calculs, par de simples alignements.

Certes, les figures inaccessibles donnent lieu à beaucoup d'autres problèmes. On peut, par exemple, proposer de reconnaître que quatre points visibles, mais inaccessibles, sont situés sur une circonférence ; ou demander l'aire du triangle dont les côtés sont inaccessibles et les sommets invisibles, etc... Mais nous ne pouvons nous étendre ici plus longuement sur ce sujet. Il suffira d'ailleurs, pour résoudre ces diverses questions, d'appliquer les idées générales que nous avons exposées, notamment celles qui ont trait à la transformation, par les diverses méthodes indiquées plus haut, des figures inaccessibles.

96. La méthode de M. Lemoine. — Nous indiquerons encore, en terminant ce chapitre, un procédé dû à M. Emile Lemoine et qui permet de déterminer les aires et les distances inaccessibles.

Soit ABC le triangle considéré; prenons trois points M_1, M_2, M_3 d'où nous puissions abaisser des perpendiculaires sur ses côtés prolongés; soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$; les coordonnées normales de ces points.

En désignant par S l'aire de ABC, nous avons :

$$(1) \qquad \begin{aligned} a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 &= 2S, \\ a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 &= 2S, \\ a\alpha_3 + b\beta_3 + c\gamma_3 &= 2S. \end{aligned}$$

Posons

$$m = \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \\ \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad m_\alpha = \begin{vmatrix} 1 \beta_1 \gamma_1 \\ 1 \beta_2 \gamma_2 \\ 1 \beta_3 \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad m_\beta = \begin{vmatrix} \alpha_1 1 \gamma_1 \\ \alpha_2 1 \gamma_2 \\ \alpha_3 1 \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad m_\gamma = \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 1 \\ \alpha_2 \beta_2 1 \\ \alpha_3 \beta_3 1 \end{vmatrix}.$$

Les équations (1) résolues par rapport à a, b, c donnent

$$(2) \qquad a = 2S\frac{m_\alpha}{m}, \qquad b = 2S\frac{m_\beta}{m}, \qquad c = 2S\frac{m_\gamma}{m}.$$

Mais on sait que

$$16S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

Substituons, dans cette égalité, les valeurs de a, b, c données par les formules (2); il vient

$$m^4 = S^2(m_\alpha + m_\beta + m_\gamma)(m_\gamma + m_\beta - m_\alpha)(m_\alpha + m - m_\beta)(m_\beta + m_\alpha - m_\gamma)$$

Cette formule permet de calculer l'aire du triangle inaccessible ABC, si l'on peut mesurer les quantités $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$. Les égalités (2) feront ensuite connaître les longueurs a, b, c des côtés des triangle ABC, si l'on veut les déterminer. En posant

$$K^2 = (m_\alpha + m_\beta + m_\gamma)(m_\gamma + m_\beta - m_\alpha)(m_\alpha + m - m_\beta)(m_\beta + m_\alpha - m_\gamma),$$

les formules trouvées deviennent

$$m^2 = SK, \qquad a = \frac{2mm_\alpha}{K}, \qquad b = \frac{2mm_\beta}{K}, \qquad c = \frac{2mm_\gamma}{K}.$$

Cette méthode est fort ingénieuse, mais elle n'est pas générale, dans le sens que nous donnons à ce mot, parce qu'elle exige, conformément à l'hypothèse faite plus haut, que les

prolongements des côtés du triangle ABC, pénètrent dans la région accessible; condition qui ne sera pas toujours vérifiée.

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur au Collège de Courdemanche.

(*Suite*, voir, p. 181.)

81. — Si, par chacun des sommets d'un triangle, on mène une tangente au cercle des neuf points du triangle, la somme des carrés de ces tangentes est égale à S cotg θ (*).

82. Le cercle des neuf points est vu, des trois sommets d'un triangle, sous des angles α, β, γ, tels que

$$\text{cotg}^2 \frac{\alpha}{2} + \text{cotg}^2 \frac{\beta}{2} + \text{cotg}^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{4S\,\text{cotg}\theta}{R^2} = 4(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

83. — Démontrer les égalités suivantes relatives aux triangles quelconques.

1° $$a^2(\text{cotg}B + \text{cotg}C) + b^2(\text{cotg}A + \text{cotg}C) + c^2(\text{cotg}A + \text{cotg}B) = 4S(\text{cotg}^2\theta - 1).$$

2° $$a\,\text{cotg}\frac{A}{2} + b\,\text{cotg}\frac{B}{2} + c\,\text{cotg}\frac{C}{2} = 2(r' + r'' + r''').$$

3° $$2p + r'\,\text{tg}\frac{A}{2} + r''\,\text{tg}\frac{B}{2} + r'''\,\text{tg}\frac{C}{2} = \frac{(4R + r)^2}{p}.$$

4° $$S = R\sin\theta\sqrt{h^2 + h'^2 + h''^2}.$$

5° $$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\text{cotg}^2 C + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\text{cotg}^2 B + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\text{cotg}^2 A = 0.$$

6° $$\sum \frac{ac\cos^2\frac{B}{2} - bc\cos^2\frac{A}{2}}{r'''} = 0.$$

(*) Dans cet exercice, et dans les suivants, θ désigne l'angle de Brocard.

84. — Soit H′ le réciproque de l'orthocentre, x, y, z, ses distances aux trois côtés; AH′, BH′, CH′, rencontrent les côtés opposés en A′, B′, C′. On a :

1°
$$\frac{h}{x}+\frac{h'}{y}+\frac{h''}{z}=\frac{hh'h''}{xyz}\,\mathrm{tg}^2\,\theta$$

2° Les droites AA′, BB′, CC′, font, avec les côtés opposés des angles qui, comptés, dans un même sens de rotation, sont tels que la somme de leurs cotangentes est nulle.

3° AA′ fait, avec les côtés AB, AC, deux angles tels que leur différence est égale à l'angle de la médiane et de la symédiane issue du même sommet.

4°
$$\frac{\overline{AA'}^2}{h^2}+\frac{\overline{BB'}^2}{h'^2}+\frac{\overline{CC'}^2}{h''^2}=2\,\mathrm{cotg}^2\theta-3.$$

1° On a
$$\frac{h}{x}=\frac{\mathrm{cotg}\,\theta}{\mathrm{cotg}\,A},$$
d'où
$$\sum\frac{h}{x}=\mathrm{cotg}\,\theta(\mathrm{tg}\,A+\mathrm{tg}\,B+\mathrm{tg}\,C)=\frac{hh'h''}{xyz}\,\mathrm{tg}^2\theta.$$

2° On a, en effet (M milieu de AB),
$$\mathrm{cotg}\,AA'B=2\,\mathrm{cotg}\,AMB=\mathrm{cotg}\,C-\mathrm{cotg}\,B.$$

3° Soient
$$\widehat{A'AB}=\alpha,\quad \widehat{A'AC}=\beta,$$
$$\alpha+\beta=A,$$
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\cos C}{\cos B},$$
$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{\mathrm{tg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\cos C+\cos B}{\cos C-\cos B}=\mathrm{cotg}\,\frac{B+C}{2}\,\mathrm{cotg}\,\frac{B-C}{2},$$
d'où
$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha-\beta}{2}=\mathrm{tg}^2\,\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{B-C}{2}=\mathrm{tg}\,\gamma\,;$$
γ étant l'angle de la médiane et de la bissectrice issue du sommet A, etc.

4°
$$AA'=h\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,AA'B,$$
$$\frac{\overline{AA'}^2}{h^2}=1+(\mathrm{cotg}\,C-\mathrm{cotg}\,B)^2,$$
$$\sum\frac{\overline{AA'}^2}{h^2}=3+2\Sigma\,\mathrm{cotg}^2\,A-2\Sigma\,\mathrm{cotg}\,A\,\mathrm{cotg}\,B=2\,\mathrm{cotg}^2\,\theta-3.$$

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu de M. Loir, à propos de l'article que nous avons récemment inséré, la lettre suivante :

Paris, 13 août 1888.

Vous avez bien voulu insérer, dans le numéro du mois de juin, de votre intéressant journal, un travail de mon fils et de moi, sur un caractère de divisibilité des nombres.

Je viens de lire dans les comptes rendus de l'Académie des sciences (n° 6; août, p. 386), une note de M. Van Dorsten, réclamant, pour le Géomètre hollandais Jacob de Gelder (Traité d'Arithmétique, Rotterdam 1793), la priorité de la découverte d'un théorème sur la divisibilité, énoncé par M. Loir.

Je ne suis pas à même de pouvoir consulter le traité hollandais de 1793, afin de savoir, si le sujet du travail (*) que je vous adresse, aujourd'hui, a jadis été traité par Jacob de Gelder, mais la question à laquelle il se rapporte me paraît assez intéressante pour être soumise à vos nombreux lecteurs.

En attendant que vous puissiez insérer ma communication dans un des numéros de votre recueil, je vous serai très reconnaissant si vous vouliez publier cette lettre dans le numéro de Septembre prochain ; je tiens à donner, le plus tôt possible, acte public à la réclamation de M. Van Dorsten, et rendre, en même temps, justice au savant auteur d'un théorème important, fécond en conséquences; sur lequel j'aurai eu, du moins, le mérite d'avoir appelé, à nouveau, l'attention.

Agréez, Monsieur le Directeur, avec mes remerciements, l'expression de mes sentiments les plus distingués.

A. LOIR,
Doyen honoraire de la Faculté des sciences de Lyon.

(*) Nous publierons prochainement la note à laquelle M. Loir fait, ici allusion.

BACCALAUREAT ÈS SCIENCES COMPLET

(NOVEMBRE 1887).

ACADÉMIE DE TOULOUSE

1. — 1° Dire ce que l'on appelle longitude et latitude d'un lieu. Expliquer comment on peut les déterminer.

2° Résoudre les deux équations suivantes où a et b sont des arcs donnés, x et y des arcs inconnus :

$$\sin x \operatorname{cotg} y = \operatorname{tg} b,$$
$$\cos y \operatorname{tang} x = \operatorname{cotg} a.$$

2. — 1° Déterminer les valeurs de x qui vérifient l'inégalité :

$$\frac{7x - 5}{8x + 3} > 4.$$

2° Trouver deux angles connaissant leur somme et le produit de leurs sinus.

3° Calculer les côtés et les angles d'un triangle connaissant le côté a, l'angle opposé A et sachant que le produit des deux autres côtés est égal à une quantité donnée m^2.

ACADÉMIE DE POITIERS

1. — 1° Montrer que le quotient de $\frac{a^n - b^n}{a - b}$ est une progression géométrique ; dire quelle est la raison de cette progression. En déduire la règle qui donne la somme des n premiers termes d'une progression géométrique.

2° Exprimer le volume de la tranche ou segment sphérique en fonction du rayon R de la sphère, de la hauteur h du segment et de la distance x de la grande base au centre. — Quelle valeur de x correspond à un volume donnée $\frac{1}{3}\pi m^2 h$, R et h étant donnés? Discussion.

2. — 1° Les sommets de deux montagnes sont dans un même plan vertical avec un observateur et lui paraissent élevés, au-dessus de l'horizon, de 9°30′ et 18°20′. L'observateur s'étant rapproché de 6365 mètres, en restant dans le même plan vertical, et sur une horizontale, voit alors les deux sommets à la même hauteur de 37° au-dessus de l'horizon. — Calculer, en mètres, la hauteur de chaque montagne.

2° Un trapèze isoscèle peut toujours être inscrit à une circonférence; mais pour être circonscrit à une circonférence il faut que chacun des côtés non parallèles soit égal à la moyenne arithmétique des deux bases.

ACADÉMIE DE CLERMONT

1. — Étant donné un cube, on inscrit une sphère à ce cube puis un cube à cette sphère, puis une sphère à ce cube; et ainsi de suite. On demande la limite de la somme de tous ces cubes, quand le nombre des inscriptions est infini. Calculer cette limite à un millième de mètre cube près, lorsque l'arête du premier cube est 1 mètre.

2. — Étant donné, dans un triangle, un angle C et les distances α et β des deux autres sommets aux côtés qui leur sont opposés, calculer le côté c.

Application : $\alpha = 19^{m},27$; $\beta = 23^{m},95$; $C = 32^\circ 18' 27$.

3. — Quel est le cylindre, inscrit à un cône de révolution, dont la surface totale est maximum ? Evaluer cette surface lorsque le rayon de base a 12 mètres et que la hauteur est égale à 28 mètres.

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

JUILLET 1888

MARSEILLE

Mathématiques.

L'hypoténuse d'un triangle rectangle dépasse d'un mètre le plus grand côté de l'angle droit, qui lui-même dépasse d'un mètre le plus petit.

1° Calculer les trois côtés;

2° Calculer les angles en degrés, minutes et secondes;

3° Le triangle, en tournant autour de son hypoténuse, engendre un solide dont la densité sera prise égale à 5. Combien ce solide pèse-t-il de kilogrammes ?

On prendra, pour π, la valeur 3,14.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

CONCOURS DE 1888

Français (2 h. 1/2).

Gourville, secrétaire de Condé, est chargé par Mazarin de ramener au parti du roi le prince alors dans le camp espagnol en vue de Dunkerque; mai 1658.

Les victoires qu'il poursuit dans une guerre contre son pays n'augmenteront pas la gloire de ses premiers succès. — Déjà la fortune a tourné

contre lui. — Son génie ne trouvera pas chez les Espagnols d'utiles auxiliaires contre Louis XIV. — Quoiqu'il fasse, Dunkerque est condamné. Qu'il rentre en grâce auprès du roi; en remettant son épée au service de la France, il retrouvera le succès et l'honneur.

Mathématiques (3 h.).

I. AB et AB′ sont deux droites parallèles, et AA′ est une perpendiculaire commune à ces deux droites, qui les rencontre en A et A′. Sur ces deux droites on prend, d'un même côté de AA′, deux longueurs $AO = x$ et $A'O' = y$ variables, mais vérifiant la relation $xy = \frac{a^2}{4}$, a désignant la distance AA′. De O et de O′, comme centres, avec les rayons x et y, on décrit deux circonférences :

1° Démontrer que ces deux circonférences sont tangentes;

2° Trouver le lieu de leur point de contact;

3° M désignant le point de contact, on mène la droite AM, que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre C′ avec A′B′; on mène de même, A′M que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre C avec AB, on trace CC′ :

Déterminer x et y de manière que le trapèze AA′CC′ ait une surface donnée.

II. On donne un cône circulaire droit et un point A sur le plan de sa base. On mène par ce point A, une droite rencontrant la circonférence de base aux points B et C. Quelle doit être la distance de cette droite au centre de la base, pour que le triangle SBC ait une surface donnée, (S étant le sommet du cône)?

III. Dans un triangle, l'angle A est de $72°27'45'',7$ et le rapport des côtés qui le comprennent est égal à $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Calculer les angles B et C.

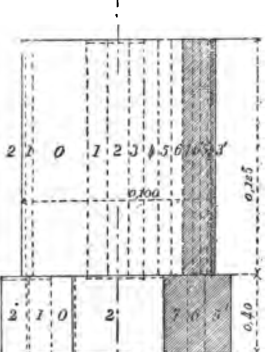
Épure (2 h. 1/2).

Un tétraèdre SABC, dont la face ABC est située sur le plan horizontal, est déterminé de la manière suivante : le sommet S a pour côté 70^{mm}, et pour éloignement 30^{mm}. L'arête SA est dans un plan ds profil, et le point A a pour éloignement 115^{mm}. La face SBC (B à gauche) est parallèle au plan vertical. Les faces SAB et SAC font chacune, avec le plan de profil qui contient l'arête SA, un angle de 45°. — Sur l'arête SB on prend, entre S et B, un point D à 20^{mm} du sommet S; et, par ce point D, on mène un plan perpendiculaire à l'arête SB; ce plan coupe SC en E et SA en F. — 1° Construire les projections du triangle DEF. — 2° On considère la sphère qui a DE pour diamètre : représenter le solide commun à cette sphère et au tétraèdre.

Lavis.

Laver, soit à teintes plates superposées, soit à teintes fondues, la projection verticale d'une borne en pierre, formée d'un prisme octogonal régulier surmonté d'un cylindre.

Les rayons lumineux sont parallèles à une droite dont les deux projections font des angles de 45° avec la partie gauche de la ligne de terre.



Les parties dans l'ombre sont recouvertes de hachures sur le croquis ci-joint.

Pour le lavis à teintes plates superposées, on se servira des lignes de teintes indiquées sur le croquis. La zône la plus claire et qui devra rester blanche étant marquée du chiffre 0, les autres sont indiquées, d'après leur intensité, par les chiffres 1, 2, 3, etc., la zone 7 étant la plus foncée.

Les chiffres 6', 5', 4', 3', indiquent que pour les parties dans l'ombre, les teintes devront être dégradées depuis la teinte 7 la plus foncée, jusqu'à la teinte 3' la plus claire; ces teintes sont plus foncés que les teintes portant les mêmes numéros, mais sans accent, dans la partie éclairée.

QUESTION 224

Solution par M. Lavieuville, professeur au collège de Dieppe.

La somme des trois rectangles que l'on peut construire, ne prenant comme éléments les trois côtés d'un triangle quelconque, est égale à la somme de trois autres rectangles ayant pour base commune le demi-périmètre du triangle et respectivement pour hauteurs, les trois droites menées, par le centre du cercle inscrit, parallèlement aux trois côtés du triangle. (Reboul.)

Si l'on désigne par l, l', l'' les longueurs des trois droites menées, par le centre du cercle inscrit, parallèlement aux trois côtés a, b, c du triangle, il faut démontrer que l'on a :

$$ab + ac + bc = p(l + l' + l'').$$

Or, en désignant par h, h', h'' les hauteurs correspondant aux côtés a, b, c, on trouve facilement :

$$l = a - \frac{ar}{h}, \qquad l' = b - \frac{br}{h'}, \qquad l'' = c - \frac{cr}{h''}.$$

On a donc

$$\theta = p(l + l' + l'') = p(a + b + c) - pr\left(\frac{a}{h} + \frac{b}{h'} + \frac{c}{h''}\right),$$

$$\theta = 2p^2 - S\left(\frac{a^2}{2S} + \frac{b^2}{2S} + \frac{c^2}{2S}\right),$$

$$\theta = 2p^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = ab + ac + bc,$$

d'où, enfin,

$$p(l + l' + l'') = ab + ac + bc.$$

NOTA. — *Solutions analogues*, par MM. Boutin, professeur au collège de Courdemanche; Ignacio Beyens, capitaine du génie, à Cadix; J. Chapron, à Bragelogne; l'abbé E. Gelin, professeur au collège Saint-Quirin, à Huy (Belgique); G. Russo à Catanzaro (Italie); Henry Gallopeau, lycée d'Angoulême; R. Younès, élève à l'Institution Springer.

Solutions trigonométriques par MM. D. Cotoni, au lycée d'Alger; Alexandre Couvert, au lycée Condorcet.

QUESTION 232

Solution par M. MARTIN (René-Henri), élève au Lycée Condorcet (classe de M. Brisse).

Si l'on ajoute, terme à terme, m *progressions géométriques, la suite* U *obtenue est récurrente; c'est-à-dire, qu'à partir du terme de rang* m + 1, *les autres sont fournies par une fonction des* m *précédentes; cette fonction est linéaire.* (Boutin.)

Considérons, pour simplifier l'écriture, le cas de trois progressions géométriques, dont les premiers termes sont a, b, c et les raisons p, q, r. Je dis que l'on peut trouver trois nombres x, y, z tels qu'en représentant par u_n le terme du rang n de la suite U on ait, *quel que soit l'entier* n, la relation de récurrence

$$u_n = xu_{n-1} + y\,u_{n-2} + zu_{n-3}.$$

En effet, on a :

$$u_n = ap^{n-1} + bq^{n-1} + cr^{n-1},$$
$$u_{n-1} = ap^{n-2} + bq^{n-2} + cr^{n-2},$$
$$u_{n-2} = ap^{n-3} + bq^{n-3} + cr^{n-3},$$
$$u_{n-3} = ap^{n-4} + bq^{n-4} + cr^{n-4}.$$

Je dis que, pour des valeurs convenables attribuées aux lettres x, y, z, on a

$$ap^{n-1} + bq^{n-1} + cr^{n-1} = \left\{\begin{array}{l} x(ap^{n-2} + bq^{n-2} + cr^{n-2}) \\ + y(ap^{n-3} + bq^{n-3} + cr^{n-3}) \\ + z(ap^{n-4} + bq^{n-4} + cr^{n-4}) \end{array}\right.$$

ou, en ordonnant par rapport à p, q, r,

$$ap^{n-4}(p^3 - p^2x - py - z) + bq^{n-4}(q^3 - q^2x - qy - z) + cr^{n-4}(r^3 - r^2x - ry - z) = 0.$$

Cette équation doit être vérifiée, *quel que soit* n ; les coefficients de ap^{n-4}, bq^{n-4}, cr^{n-4} doivent donc être nuls et l'on a

$$\begin{array}{l} p^2x + py + z = p^3, \\ q^2x + qy + z = q^3, \\ r^2x + ry + z = r^3. \end{array}$$

Ces équations déterminent les inconnues x, y, z. Si l'on suppose $p \neq q \neq r$, le problème est déterminé et l'on trouve :

$$x = p + q + r, \quad y = -(pq + qr + pr), \quad z = pqr.$$

Dans le cas général, le déterminant des inconnues est un déterminant de Vandermonde ; et la résolution des équations auxquelles on est alors conduit se fait immédiatement, en appliquant les relations connnes entre les coefficients et les racines d'une équation.

QUESTION 235

Solution par J. Chapron, à Bragelogne.

Si A, B, C *sont les angles d'un triangle, on a*

$$1 + \sin\left(B + \frac{A}{2}\right) + \sin\left(C + \frac{B}{2}\right) + \sin\left(A + \frac{C}{2}\right) = 4 \cos\frac{B - A}{4} \cos\frac{C - B}{4} \cos\frac{A - C}{4}.$$

(Boutin).

On sait que

$$\cos(a + b + c) + \cos(a + b - c) + \cos(a - b + c) + \cos(b + c - a) = 4 \cos a \cos b \cos c.$$

Si l'on transforme le second membre de la relation à démontrer, d'après cette formule, il devient:

$$1 + \cos\frac{C - A}{2} + \cos\frac{A - B}{2} + \cos\frac{C - B}{2}.$$

Or,

$$B + \frac{A}{2} = \frac{2B + A}{2} = \frac{A + B + C + (B - C)}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C - B}{2}.$$

On a donc
$$\sin\left(B + \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{C - B}{2},$$
$$\sin\left(C + \frac{B}{2}\right) = \cos\frac{C - A}{2},$$
$$\sin\left(A + \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{A - B}{2}.$$

La relation énoncée se trouve donc établie.

Solutions diverses par MM. l'abbé Gelin, professeur au collège Saint-Quirin, à Huy (Belgique); Alexandre Couvert, au lycée Condorcet; Ignacio Beyens, capitaine du génie à Cadix (Espagne); D. Cotoui, au lycée d'Alger; René-Henri Martin, au lycée Condorcet (classe de M. Brisse); E. Quintard, suppléant au collège Chaptal.

QUESTION 243

Solution, par M. Séfa, à Constantinople.

On considère un triangle rectangle BAC, *et l'on prend, sur l'hypoténuse* BC, *un point quelconque* M. *Ayant abaissé, sur* BC *une perpendiculaire* AI, *on détermine sur celle-ci un point* I *tel que* $\overline{AI}^2 = MC.MB$. *La droite* MI *rencontre les côtés* AC, AB *en deux points* P *et* Q:

Démontrer que les points MI *sont isotomiques sur* PQ; *en d'autres termes, que les points* M *et* I *sont symétriques par rapport au milieu de* PQ.

Appelons D le pied de la perpendiculaire AI.

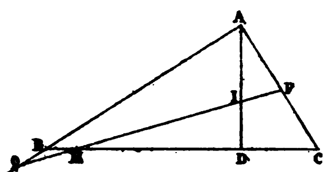
Le triangle IMD, coupé parla transversale AB, donne

$$AD.BM.QI = AI.BD.QM.$$

Le même triangle, coupé par la transversale AC, donne

$$AD.PI.CM = AI.PM.CD.$$

Multipliant membre à membre ces deux égalités, et observant que $\overline{AD}^2 = BD.CD$, et que, d'après l'énoncé $BM.CM = \overline{AI}^2$ on a :



$$QI.PI = QM.PM;$$

ce qui exige que I et M soient si otomiques sur PQ.

Remarque. — On verrait facilement que le lieu du milieu de IM est le cercle d'Euler du triangle BAC.

Solutions diverses par M. D. Cotoni (lycée d'Alger); Pollotin, élève au collège ecclésiastique de Belley; J. Chapron, à Bragelogne; Henry Galopeau, élève au lycée d'Angoulème; Mottet, élève au collège ecclésiastique de Belley; J. M. Galban, élève à l'école polytechnique de Madrid.

QUESTIONS PROPOSÉES

290. — Résoudre l'équation

$$(\alpha x + \beta)^3 + (\alpha' x + \beta')^3 + x^3 = 3(\alpha x + \beta)(\alpha' x + \beta')x.$$

Déduire de là, en supposant $\alpha = \alpha' = 0$, une méthode élémentaire pour résoudre l'équation du troisième degré.

(G. L.)

291. — Résoudre l'équation

$$\alpha(x^2 - px + q)^2 + \beta(x^2 + px + q)^2 = x^2. \quad (G.\ L.)$$

292. — Résoudre l'équation

$$(x + b + c)(x + c + a)(x + a + b)(a + b + c) - abcx = 0.$$

(G. L.)

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMIN DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 16976-8-8.

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 196.)

CHAPITRES IX et X

LES PROBLÈMES D'ARTILLERIE

Le tir de projectiles à de grandes distances et la guerre des sièges soulèvent plusieurs problèmes dont la solution ressort de la géométrie qui nous occupe. Nous nous proposons d'examiner un certain nombre d'entre eux.

Au premier abord, on sera sans doute porté à ne voir, dans les développements qui suivent, que de simples jeux de l'esprit; quelque chose enfin, dans le domaine géométrique, d'assez semblable aux *récréations mathématiques* de l'Arithmétique. Certes, ce jugement serait exact, de tous points, si l'on devait considérer uniquement les manœuvres exécutées par l'artillerie en un jour de combat. En pareil cas, les théories ne sont pas à leur place. Mais on voudra bien accorder que le rôle de l'artillerie est plus étendu. Ainsi, il peut arriver (la dernière guerre n'en a-t-elle pas fourni des exemples?) que deux armées, dont l'une est enveloppée par l'autre, restent longtemps en présence. A d'autres moments, l'artillerie peut être appelée à entreprendre, ou à soutenir, des sièges de longue durée; à cerner des forts; à surveiller les côtes ou à protéger quelque passage, etc.

Alors, les problèmes que nous allons traiter, même envisagés au point de vue pratique, ne paraîtront peut-être plus aussi frivoles qu'à la première vue; et l'on pourra voir se produire des cas où les solutions que nous allons exposer rencontreront des applications intéressantes.

97. L'établissement du fort central. — Trois points A, B, C donnés représentent des positions qui doivent être protégées par un fort; il s'agit de déterminer l'emplacement de celui-ci de façon qu'il commande également bien les trois positions données. En d'autres termes, on propose de fixer la situation du centre O du cercle circonscrit à ABC; ce point obtenu, il restera, bien entendu, à comparer les distances $OA = OB = OC$, avec la portée moyenne des pièces, pour vérifier que la position trouvée, pour le point O, n'est ni trop éloignée, ni, ce qui peut être un inconvénient d'une autre nature, trop rapprochée.

Premier cas. *(Les points* A, B, C *sont accessibles)* — Bien que les points donnés soient supposés accessibles, il ne saurait être question de résoudre le problème actuel en élevant des perpendiculaires aux milieux des côtés AB, BC, CA; ces droites ont des longueurs beaucoup trop considérables, pour qu'il soit possible, en général, de trouver commodément leurs points milieux. Il y a donc là, on le comprend, une certaine difficulté, de l'ordre pratique; voici comment on peut la tourner.

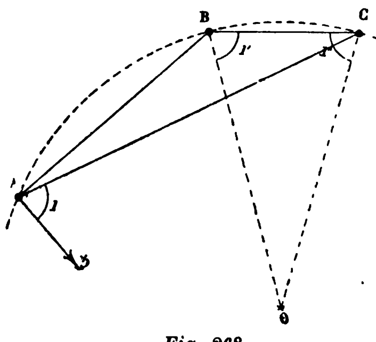


Fig. 268.

Élevons Az perpendiculaire à AB; et, avec la fausse équerre, relevons l'angle CAz; en transportant l'instrument successivement aux points B, C, on pourra jalonner deux droites BO, CO formant avec BC des angles $\widehat{I'}$, $\widehat{I''}$, égaux à l'angle $\widehat{I}$. Ces droites concourent au point cherché.

On observera que la construction précédente comporte une vérification très utile puisque l'on peut reproduire, de deux autres façons, le tracé indiqué en remplaçant successivement: A, par B; puis par C.

Quant à la distance OA, elle est trop considérable pour être trouvée par un chaînage direct; on l'obtiendra en considérant

le point A comme inaccessible, et en déterminant OA par l'une des méthodes que nous avons indiquées au chapitre VI.

Deuxième cas (*les points* A, B, C *sont inaccessibles*). — Imaginons par exemple que l'on veuille établir, au bord de la mer, un fort dont les feux commandent trois îlots voisins A, B, C ; on peut demander de placer ce fort à la même distance de ces trois points.

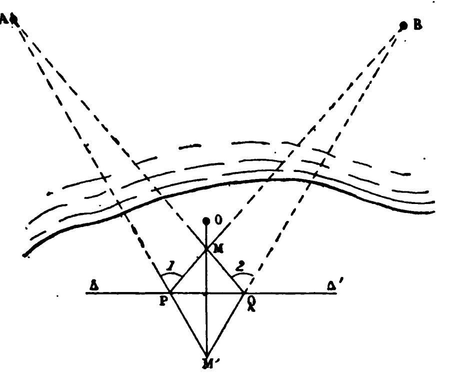


Fig. 269.

Pour déterminer le point central ; on tracera d'abord, dans la partie accessible, une droite ΔΔ' parallèle à AB (Chapitre VII). Autant que possible, pour éviter des jalonnements trop longs, on cherchera à placer ΔΔ' dans le voisinage du point inconnu. D'un point P, pris sur ΔΔ', arbitrairement d'ailleurs, on vise les points A, B; et, après avoir jalonné les lignes de visée PM, PM', on relève avec la fausse équerre l'angle APB. On se transporte ensuite sur ΔΔ' jusqu'à ce qu'on trouve un point Q d'où l'on aperçoive AB sous un angle AQB = APB ; puis, on jalonne de nouveau les lignes de visée QM, QM', on obtient ainsi une droite MM' qui va passer par le point inconnu. En reproduisant, avec AC, les constructions que nous venons d'indiquer, on déterminera une seconde droite qui coupera MM' au point cherché.

98. Cas où le point central est trop éloigné. — Dans le cas où le point central est trop éloigné, et par conséquent sans usage, on peut rechercher quelle est la meilleure situation qui convienne à l'établissement du fort que l'on veut construire. Si, pour fixer les idées, nous supposons que le point C soit celui des trois points donnés que l'on veuille plus particulièrement tenir sous l'action du fort, on placera avantageusement le fort au point d'intersection de la perpendi-

culaire élevée au milieu de AB (droite que l'on peut obtenir comme nous l'avons expliqué tout à l'heure), avec OC.

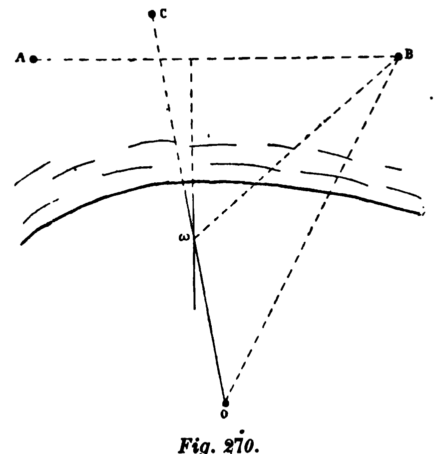


Fig. 270.

Soit ω ce point : on a $\omega A = \omega B$ et $\omega C < \omega B$. Pour vérifier que ωC est plus petit que ωA, on observera que l'on a

$$OB < O\omega + \omega B,$$

ou

$$OC = O\omega + \omega C < O\omega + \omega B,$$

ou, enfin,

$$\omega C < \omega B.$$

Ainsi, du point ω, on commandera également bien les points A, B ; si la distance ωA ne dépasse pas la portée du tir, cette condition se trouvera, *a fortiori*, réalisée pour le point C.

99. Le Tir central. — Un point O donné doit servir de but ; on propose alors de fixer les emplacements de plusieurs batteries qui soient toutes à la même distance de O. Bien entendu, ce point est supposé inaccessible et à une distance relativement grande, de la région où l'on peut opérer.

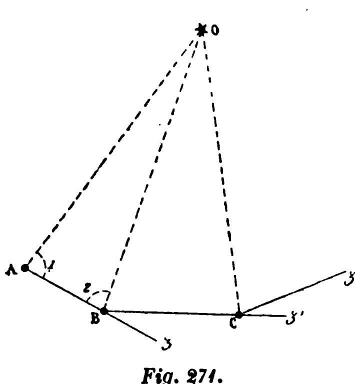


Fig. 271.

Ayant pris un point A, arbitrairement, pour y établir la première batterie, on trace un alignement A*z* faisant, avec OA, un angle $\widehat{1}$ que l'on relève avec la fausse équerre. On chemine alors sur A*z* jusqu'à ce qu'on trouve le point B d'où l'on voit OA sous un angle $\widehat{2}$ égal à l'angle $\widehat{1}$; c'est en B qu'on doit fixer la position de la deuxième

batterie. On répétera, avec les alignements Bz', Cz'... la même opération; et l'on obtiendra, de la sorte, autant de points que l'on voudra, équidistants de O.

Si les batteries doivent être très rapprochées les unes des autres, on prendra pour l'angle $\widehat{\text{I}}$ un angle aigu, voisin de l'angle droit; et, si l'on veut qu'elles soient équidistantes, on conservera à la fausse équerre, dans tout le cours des opérations, l'angle $\widehat{\text{I}}$ primitivement adopté.

100. Le chemin de sûreté. — Supposons que O représente un fort assiégé; on veut tracer une ligne polygonale; aussi rapprochée que possible de celui-ci, et de telle sorte que les points extérieurs de cette ligne soient à l'abri des projectiles de O.

Soit A la trace d'un projectile lancé par O; jalonnons Az perpendiculaire à OA et prenons, sur Az, un certain point B. Ayant relevé avec la fausse équerre l'angle ABO, on trace l'alignement Bz', de telle sorte que $OBz' = ABO$. Cette droite Bz' représente un des côtés du chemin de sûreté. En opérant ainsi, successivement, on obtiendra une ligne polygonale Az, Bz', Cz'',... enveloppant le fort, et, tous les points situés hors du périmètre de cette ligne ne seront pas exposés au feu du fort.

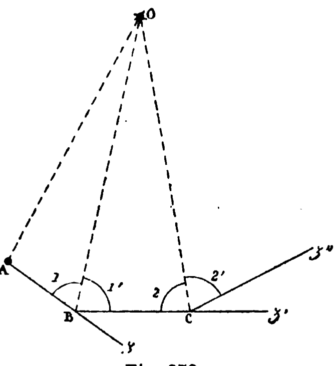


Fig. 272.

Bien entendu on prendra, pour point de départ de la construction indiquée, la trace du projectile qui est tombé à la plus grande distance de O. Deux traces semblables A, A′ étant données; pour savoir quelle est celle qui est la plus éloignée de O, on relève avec la fausse équerre l'angle OAA′ et l'on voit si cet angle est supérieur, égal, ou inférieur à OA′A. Suivant ces différents cas, on a : $OA < OA'$, $OA = OA'$, ou enfin $OA > OA'$.

Nous abordons maintenant une question qui peut offrir un

intérêt particulier dans la guerre des sièges; aussi, le traiterons-nous avec quelques détails. Nous voulons parler du problème dans lequel on propose de lancer des projectiles sur un but invisible. Il faut, pour résoudre complètement ce problème, déterminer : 1° la ligne de tir; et, 2° la distance du point d'attaque, au but que l'on veut atteindre.

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin,** professeur au Collège de Courdemanche.

(*Suite*, voir p. 206.)

85. — Nous proposons d'introduire, dans la Géométrie du triangle, un angle φ déterminé par la relation

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C.$$

Si θ est l'angle de Brocard, déterminé par la relation

$$\operatorname{cotg} \theta = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C,$$

on voit aisément que, toute fonction symétrique des angles A, B, C, est une fonction des deux angles θ, φ.

Ceci posé, nous proposons la démonstration des identités suivantes :

1° $$\sin A \sin B \sin C = \frac{1}{\operatorname{cotg} \theta - \operatorname{cotg} \varphi},$$

2° $$\cos A \cos B \cos C = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta - 1},$$

3° $$\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} + \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A} + \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} C} + \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A} + \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} + \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B} = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta - 3,$$

4° $$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{4 \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta - 1},$$

5° $$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = \frac{3 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta},$$

6° $$\operatorname{tg} 2A + \operatorname{tg} 2B + \operatorname{tg} 2C = \frac{8 \operatorname{tg} \varphi}{(\operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \theta - 1)^2},$$

7° $$\operatorname{cotg} 2A + \operatorname{cotg} 2B + \operatorname{cotg} 2C = \frac{1}{2} (\operatorname{cotg} \theta - \operatorname{tg} \varphi),$$

8° $$S = \frac{2R^2}{\cot\theta - \cot\varphi},$$

9° $$\frac{1}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} + \frac{1}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C} + \frac{1}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = \cot(\varphi - \theta),$$

10° En désignant pour abréger

$\cot^n A + \cot^n B + \cot^n C$, et $\operatorname{tg}^n A + \operatorname{tg}^n B + \operatorname{tg}^n C$ par Σ_n, Σ'_n on a : $$\Sigma_2 = \cot^2\theta - 2,$$

11° $\Sigma_3 = \cot^3\theta - 3\cot\theta + 3\cot\varphi$,

12° $\Sigma_4 = \cot^4\theta - 4\cot^2\theta + 4\cot\theta\cot\varphi + 2$,

13° $\Sigma_5 = \cot^5\theta - 5\cot^3\theta + 5\cot^2\theta\cot\varphi + 5\cot\theta - 5\cot\varphi$,

14° $\Sigma_6 = \cot^6\theta - 6\cot^4\theta + 6\cot^3\theta\cot\varphi + 9\cot^2\theta - 12\cot\theta\cot\varphi + \cot^2\varphi - 2$,

15° $\Sigma'_2 = \operatorname{tg}^2\varphi - 2\operatorname{tg}\varphi\cot\theta$,

16° $\Sigma'_3 = \operatorname{tg}^3\varphi - 3\operatorname{tg}^2\varphi\cot\theta + 3\operatorname{tg}\varphi$,

17° $\Sigma'_4 = \operatorname{tg}^4\varphi - 4\operatorname{tg}^3\varphi\cot\theta + 2\cot^2\theta\operatorname{tg}^2\varphi + 4\operatorname{tg}^2\varphi$,

18° $\Sigma'_5 = \operatorname{tg}^5\varphi - 5\operatorname{tg}^4\varphi\cot\theta + 5\operatorname{tg}^3\varphi\cot^2\theta + 5\operatorname{tg}^3\varphi - 5\operatorname{tg}^2\varphi\cot\theta$,

et d'une manière générale

19° $\Sigma_n = \cot\theta\,\Sigma_{n-1} - \Sigma_{n-2} + \cot\varphi\,\Sigma_{n-3}$,

20° $\Sigma'_n = \operatorname{tg}\varphi\,\Sigma'_{n-1} - \cot\theta\operatorname{tg}\varphi\,\Sigma'_{n-2} + \operatorname{tg}\varphi\,\Sigma'_{n-3}$,

21° La somme des carrés des six segments déterminés sur les côtés d'un triangle, par les pieds des hauteurs, a pour expression :
$$4S[\cot\theta - \cot(\varphi - \theta)],$$

22° $$\cot 2\varphi = \cot 2A \cot 2B \cot 2C - \operatorname{cos\acute{e}c} 2A \operatorname{cos\acute{e}c} 2B \operatorname{cos\acute{e}c} 2C - \frac{1}{2}\operatorname{cos\acute{e}c} A \operatorname{cos\acute{e}c} B \operatorname{cos\acute{e}c} C.$$

(A suivre.)

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

(Section des sciences mathématiques.)

CONCOURS DE 1887

Algèbre et trigonométrie.

On considère un quadrilatère convexe ABCD, le centre de gravité G de sa surface, et le point de rencontre O de ses diagonales. Soient α, β, γ, δ les aires respectives des triangles GAB, GBC, GCD, GDA, et α', β' γ', δ' celles des triangles OAB, OBC, OCD, ODA :

1° Démontrer que la surface S du quadrilatère est exprimée par le binôme :

$$3\alpha + \gamma,$$

ou par les binômes analogues;

2° Trouver la relation entre les quatre surfaces α', β', γ', δ', puis la relation entre les surfaces α, β, γ, δ;

3° Résoudre le quadrilatère, sachant que les distances du centre de gravité G aux côtés AB, BC, CD, DA sont respectivement (en mètres) :

$$a' = \frac{8}{3}r, \quad b' = \frac{7}{18}, \quad c' = \frac{10}{3}r, \quad d' = \frac{7}{15}$$

et sachant en outre que l'on a (en mètres carrés) :

$$\alpha + \beta = 5r, \quad \beta = \gamma = 4r, \quad \gamma + \delta = 4r, \quad \delta + \alpha = 5r,$$

où r désigne la racine positive de l'équation :

$$44x^2 + 16x - 1 = 0.$$

Mécanique.

Un fil de fer vertical AB, de 10 mètres de longueur, et dont la section normale mesure 50 millimètres carrés, est fixé par son extrémité supérieure A, et se termine, par un crochet, à son extrémité inférieure B. Ce fil s'allonge de 1 centimètre quand on exerce sur lui, sans choc, une traction de 20 kilogrammes par millimètre carré de sa section, et, pour des tractions moindres, l'allongement est proportionnel à la traction. Cela posé, et le fil de fer étant au repos, on accroche en B, sans choc, une charge donnée de P kilogrammes, assez faible pour que les allongements ne dépassent pas 1 centimètre, et l'on demande :

1° Quel sera le plus grand allongement absolu qu'éprouvera le fil, ou de combien s'abaissera le crochet B?

2° Au bout de combien de temps se produira cet allongement maximum?

3° Si cet allongement persistera, et quelles seront les principales circonstances du mouvement?

4° Quelle est la plus grande valeur que puisse avoir le poids P sans que la limite de 1 centimètre, pour les allongements, soit dépassée?

On négligera la masse et le poids du fil, en comparaison de la masse et du poids du fardeau.

Géométrie descriptive.

Une sphère opaque est posée sur le plan horizontal, et un angle droit est donné dans ce plan.

Construire un point tel que, si l'on y place une lumière, l'ombre que portera la sphère sur le plan horizontal soit limitée par une parabole tangente aux deux côtés de l'angle droit donné. Déterminer cette ombre portée, ainsi que l'ombre propre de la sphère.

Les ombres seront indiquées par des hachures.

Épreuves orales.

Épreuve pratique de calcul.

On donne la base BC = a d'un triangle, et les angles adjacents B et C. Inscrire au triangle ainsi défini, un triangle équilatéral dont un côté NP soit parallèle à la base BC du triangle. On cherchera l'expression du

rapport $k = \frac{MB}{MC}$, ainsi que les segments MB, MC et le côté NP du triangle équilatéral.

Application: $BC = 1294^m,67,$
$B = 50°3'57'',$
$C = 39°56'3''.$

Épreuve pratique de géométrie descriptive.

Une demi-sphère creuse ACB, éclairée par le point lumineux P, repose, par son sommet C, sur le plan horizontal. Déterminer l'ombre propre ainsi que l'ombre portée sur le plan horizontal.

Données numériques:

Le centre O de la sphère est à 5 centimètres au-dessus du plan horizontal, et à 85 millimètres en avant du plan vertical. Le point P est situé dans le plan de front, qui contient ce centre, à 125millimètres au-dessus du plan horizontal et à la même distance de 125 millimètres à droite de la verticale du centre.

QUESTION 236

Solution par M. MARTIN (René Henri), élève au lycée Condorcet,

Démontrer la formule

$$\text{arc cos} \frac{a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \cos x}{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2) \cos x} = 2 \text{ arc tg} \left(\frac{b}{a} \text{tg} \frac{x}{2}\right) \quad (A)$$

(Boutin.)

Il faut démontrer que l'on a

$$\cos 2 \text{ arc tg} \left(\frac{b}{a} \text{tg} \frac{x}{2}\right) = \frac{a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \cos x}{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2) \cos x},$$

ou

$$(1) \quad 2 \cos^2 \text{arc tg} \left(\frac{b}{a} \text{tg} \frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \cos x}{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2) \cos x}.$$

Or: $$\cos^2 \text{arc tg} \left(\frac{b}{a} \text{tg} \frac{x}{2}\right) = \frac{a^2}{a^2 + b^2 \text{tg} \frac{x}{2}} \quad (*)$$

(*) Cette égalité n'est pas évidente. On la vérifie en posant

$$\text{arc tg} \left(\frac{b}{a} \text{tg} \frac{x}{2}\right) = z,$$

d'où $$\frac{b}{a} \text{tg} \frac{x}{2} = \text{tg } z.$$

Mais on a $$\cos^2 z = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 z}, \text{ etc...}$$ G. L.

Le premier membre de l'égalité (1) devient donc

$$\frac{a^2 - b^2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

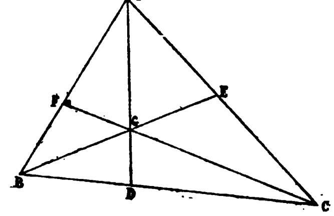
En remplaçant $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$ par sa valeur $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$, on vérifie immédiatement l'identité (A).

Solutions diverses par MM. l'abbé Gelin, professeur au collège Saint-Quirin, à Huy (Belgique); Ignacio Beyens, capitaine du Génie à Cadix (Espagne); Alexandre Couvert, lycée Condorcet; J. Chapron, à Bragelogne A. Troille, élève au lycée de Grenoble; P. Bourgarel, à Antibes; Quintard, à Arbois.

QUESTION 237

Solution et développements, par M. l'abbé E. Gelin, professeur au collège Saint-Quirin, à Huy.

Dans le triangle ABC *on mène les droites* AD, BE, CF, *qui se coupent au même point* G, *et rencontrent les côtés opposés aux points* D, E, F. *On propose de démontrer que*



$$\frac{AG}{DG} = \frac{AE}{CE} + \frac{AF}{BF}.$$

(G. Russo.)

On a

$$\frac{AG}{DG} = \frac{ABG}{BDG} = \frac{ACG}{CDG} = \frac{ABG + ACG}{BCG} = \frac{ABG}{BCG} + \frac{ACG}{BCG}.$$

Or, $$\frac{AE}{CE} = \frac{ABE}{BCE} = \frac{AGE}{CGE} = \frac{ABE - AGE}{BCE - CGE} = \frac{ABG}{BCG},$$

et, de même, $$\frac{AF}{BF} = \frac{ACG}{BCG}.$$

Donc $$\frac{AG}{DG} = \frac{AE}{CE} + \frac{AF}{BF}.$$

Si l'on observe que les segments AG et DG, AE et CE,

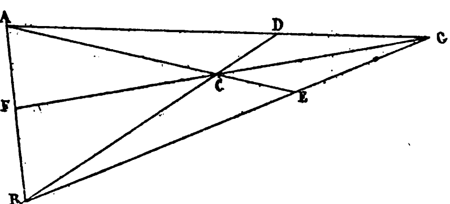
AF et BF sont de sens contraires, par rapport aux points G, E, F, on pourra regarder les rapports AG : DG, AE : CE, AF : BF comme négatifs, et écrire :

$$\left(-\frac{AG}{DG}\right) = \left(-\frac{AE}{CE}\right) + \left(-\frac{AF}{BF}\right).$$

Si les droites AD, BE, CF se coupent à l'extérieur du triangle, si, par exemple, le point D est sur le prolongement de BC, le point E sur le prolongement de AC et le point F entre AB, on aura :

$$\frac{AG}{DG} = \frac{AE}{CE} - \frac{AF}{BF}.$$

Si l'on observe que les segments AG et DG, AE et CE sont de même sens, et les segments AF et BF de sens contraires, ou pourra regarder les rapports AG : DG et AE : CE comme positifs, et le rapport AF : BF comme négatif; puis écrire :



$$\left(+\frac{AG}{DG}\right) = \left(+\frac{AE}{CE}\right) + \left(-\frac{AF}{BF}\right).$$

On a donc, *dans tous les cas*,

$$\frac{AG}{DG} = \frac{AE}{CE} + \frac{AF}{BF},$$

pourvu que l'on donne aux rapports le signe positif ou le signe négatif, suivant que les segments sont de même sens ou de sens contraires.

Le théorème qu'on vient de démontrer donne un moyen commode de construire les expressions de la forme

$$\frac{X}{Y} = \frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} \pm \frac{a_3}{b_3} \pm \ldots \pm \frac{a_n}{b_n}.$$

Soit d'abord à construire l'expression

$$\frac{X}{Y} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \cdots + \frac{a_n}{b_n},$$

ou $\left(-\frac{X}{Y}\right) = \left(-\frac{a_1}{b_1}\right) + \left(-\frac{a_2}{b_2}\right) + \left(-\frac{a_3}{b_3}\right) + \cdots + \left(-\frac{a_n}{b_n}\right)$;

c'est-à-dire une somme de rapports *négatifs*.

Ayant mené, par un point O, n droites, on prend, sur la première, les longueurs *de même sens* OA_1, A_1B_1, proportionnelles à a_1, b_1; sur la deuxième, les longueurs *de même sens* OA_2, A_2B_2, proportionnelles à a_2, b_2; sur la troisième, les longueurs *de même sens* OA_3, A_3B_3, proportionnelles à a_3, b_3; et ainsi de suite.

On tire A_1B_2 et A_2B_1, qui se coupent en C_1, puis OC_1, qui coupe B_1B_2 en D_1; et l'on a :

$$\frac{OC_1}{C_1D_1} = \frac{OA_1}{A_1B_1} + \frac{OA_2}{A_2B_2} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}.$$

On tire C_1B_3 et D_1A_3, qui se coupent en C_2, puis OC_2, qui coupe D_1B_3 en D_2; et l'on a :

$$\frac{OC_2}{C_2D_2} = \frac{OC_1}{C_1D_1} + \frac{OA_3}{A_3B_3} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3};$$

et ainsi de suite.

Soit maintenant à construire l'expression

$$\frac{X}{Y} = \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3} + \dots .$$

ou $$\left(-\frac{X}{Y}\right) = \left(-\frac{a_1}{b_1}\right) + \left(+\frac{a_2}{b_2}\right) + \left(+\frac{a_3}{b_2}\right) + \dots,$$

c'est-à dire une somme de rapports, les uns *positifs*, les autres *négatifs*.

La construction sera la même que dans le cas précédent; seulement, tandis que les longueurs proportionnelles à a_1 et b_1... seront *de même sens*, les longueurs proportionnelles à a_2 et b_2, a_3 et b_3... seront *de sens contraires*.

Comme cas particulier, on peut construire la *moyenne harmonique* de m droites a_1, a_2, a_3, ..., a_m, c'est-à-dire une droite x telle que l'on ait

$$\frac{m}{x} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_m}.$$

Ayant décrit, d'un point O comme centre, et avec un rayon arbitraire ρ, une circonférence, on mènera m rayons OA_1, OA_2, OA_3, ..., que l'on prolongera de longueurs A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ..., respectivement égales à a_1, a_2, a_3, ..., Ayant ensuite achevé les constructions comme il a été dit plus haut, on

trouvera deux droites X, Y, telles que l'on aura

$$\frac{X}{Y} = \frac{\rho}{a_1} + \frac{\rho}{a_2} + \frac{\rho}{a_3} + \cdots + \frac{\rho}{a_m},$$

et, par suite,
$$m\frac{\rho}{x} = \frac{X}{Y};$$

en sorte que x sera égal à m fois la quatrième proportionnelle aux droites X, Y, ρ.

Solutions diverses par M. Ignacio Beyens, capitaine du génie à Cadix (Espagne); René-Henri Martin, élève au lycée Condorcet (classe de M. Brisse): A. Boutin, professeur au collège de Courdemanche (Sarthe); Henri Galopeau, élève au lycée d'Angoulême; Jean Truchi, maître répétiteur au collège de Menton; A. Troille, élève au lycée de Grenoble.

QUESTION 239

Solution par M. A. Boutin, professeur au Collège de Vire.

Résoudre le système :

$$x(y + z + xyz) = a,$$
$$y(x + z + yxz) = b,$$
$$z(x + y + zxy) = c. \qquad \text{(I. Beyens.)}$$

Ajoutant l'unité aux deux membres de chaque égalité, on a

$$(1 + xy)(1 + xz) = a + 1,$$
$$(1 + xy)(1 + yz) = b + 1.$$
$$(1 + xz)(1 + yz) = c + 1;$$

d'où,
$$1 + xy = \pm\sqrt{\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}},$$
$$1 + xz = \pm\sqrt{\frac{(a+1)(c+1)}{b+1}},$$
$$1 + yz = \pm\sqrt{\frac{(b+1)(c+1)}{a+1}}.$$

De ces relations, on tire xy, xz, yz, et l'on est ramené à la résolution d'équations symétriques constituant un système connu.

QUESTION 245

Solution par M. l'abbé E. Gelin, professeur au Collège Saint-Quirin, à Huy (Belgique).

Résoudre le système suivant :

$$x^4 + a - b = y^4 + b - c = z^4 + c - d = u^4 + d - a = xyzu.$$

(I. Beyens.)

On a

$$x^4 = xyzu - a + b,$$
$$y^4 = xyzu - b + c,$$
$$z^4 = xyzu - c + d,$$
$$u^4 = xyzu - d + a;$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$[a(a - b) + b(b - c) + c(c - d) + d(d - a)]x^2y^2z^2u^2$$
$$- (a - b + c - d)(a - c)(b - d)xyzu$$
$$- (a - b)(b - c)(c - d)(d - a) = 0,$$

équation qui fera connaître le produit $xyzu$, et, par suite, $x^4y^4z^4u^4$.

Les racines du système proposé sont imaginaires; car, en ajoutant membre à membre les quatre équations on a

$$x^4 + y^4 + z^4 + u^4 = 4xyzu,$$

ou

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4 + u^4}{4} = \sqrt[4]{x^4y^4z^4u^4};$$

ce qui est impossible; car la moyenne arithmétique de plusieurs nombres est plus grande que leur moyenne géométrique.

Nota. — Solutions analogues par MM. A. Boutin, professeur au lycée de Courdemanche, et J. Chapron, à Bragelogne.

QUESTION 246

Solution par MM. E. Martinez et J. Galban, à Madrid.

Soit AB *un diamètre pris dans un cercle* C. *Un cercle tangent, en* A, *à* AB, *coupe la tangente au cercle* C, *en* B, *en deux points* M *et* M'. *Les droites* AM *et* AM' *coupent le cercle* C *respectivement*

en P, P′. *La droite* BP *coupe* AM *en* Q, *et la droite* BP′ *coupe* AM *en* Q′. *Démontrer que la droite* QQ′ *se confond avec le diamètre du cercle* C, *qui est perpendiculaire à* AP. (d'Ocagne.)

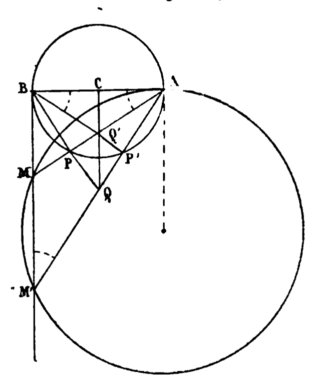
Les angles ABP′, AM′B sont égaux comme ayant, l'un et l'autre, pour complément BAP′. D'autre part, les angles AM′B, BPA sont égaux, parce que dans la circonférence AMM′ ils ont pour mesure commune, la moitié de l'arc AM. Nous avons donc

ang. ABP′ = ang. PAB,

et aussi,

ang. ABP = ang. P′AB.

Ainsi, les triangles BQA, BQ′A sont isoscèles, et la droite QQ′ est perpendiculaire au milieu de AB.



NOTA. — Solutions analogues par MM. G. Russo à Catanzaro (Italie); Ignacio Beyens, capitaine du Génie, à Cadix; H. Gilly, à Nimes; Mineur. élève en mathématiques préparatoires au lycée de Dijon; L'abbé E. Gelin, professeur au collège Saint-Quirin, à Huy (Belgique ; P. Gonord, école J.-B. Say ; Alexandre Couvert, au lycée Condorcet; J. Chapron, à Bragelogne ; P. Graussaud, élève de 4me année, à l'école J.-B. Say.

QUESTION 247

Solution par M. Clément Thiry, étudiant à l'Université de Gand (Belgique).

Dans le triangle rectangle ABC *on mène la médiane* AM *et la perpendiculaire* AD *sur l'hypoténuse. On désigne par* r, r_1, ρ_1, ρ_2 *les rayons des cercles inscrits aux triangles* ABC, ABD, ADC, ABM, ACM *et par* h *la hauteur* AD. *Démontrer que :*

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{r} + \frac{2}{h}; \qquad \frac{r_1}{\rho_1} + \frac{r_2}{\rho_2} = 2.$$

(G. Russo.)

On a, par des propriétés connues,

$$\rho = \frac{\text{ABM}}{\frac{c + \text{AM} + \text{BM}}{2}} = \frac{\text{S}}{c + a} = \frac{pr}{c + a}.$$

De même, $\rho_2 = \dfrac{\text{S}}{b + a} = \dfrac{pr}{b + a}.$

D'autre part, les triangles semblables ABC, ABD, ADC donnent

$$r_1 = \frac{rc}{a}, \qquad r_2 = \frac{rb}{a}.$$

On en conclut :

1° $\dfrac{1}{\rho_1} + \dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{c + a + b + a}{\text{S}} = \dfrac{2p}{\text{S}} + \dfrac{a}{\text{S}} = \dfrac{2}{r} + \dfrac{2}{h};$

2°

$$\frac{r_1}{\rho_1} + \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{c(c+a)}{ap} + \frac{b(b+a)}{ap} = \frac{c^2 + ac + b^2 + ab}{ap} = \frac{a+b+c}{p} = 2.$$

Remarques I. — En rapprochant, de ces relations, les formules connues:

$$h = r + r_1 + r_2, \qquad r^2 = r_1^2 + r_2^2,$$

$$r_1 r_2 = h\left(\frac{h}{2} - r\right);$$

on a

$$\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = \frac{c^2 + a^2 + 2ca + b^2 + a^2 + 2ba}{\text{S}^2} = \frac{a(4p + a)}{\text{S}^2} = \frac{a^2}{\text{S}^2} + \frac{4ap}{p^2 r^2},$$

ou,

$$\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = \frac{4}{h^2} + \frac{1}{r^2} \times \frac{8r}{h} = 4\left(\frac{1}{h^2} + \frac{2}{rh}\right).$$

Solution par MM. l'abbé E. Gelin, professeur au collège Saint-Quirin à Huy (Belgique); Ignacio Beyens, capitaine du Génie, à Cadix.

QUESTION 249

Solution et généralisation par J. Chapron, à Bragelogne.

Si N *est un multiple de* 3, *on prend dans la suite décroissante,* N — 1, N — 2,... 2, 1, *tous les nombres qui ne sont pas multiples de* 3, *les deux premiers avec le signe* +, *les deux suivants*

avec le signe —, les deux suivants avec le signe +, etc., et l'on fait la somme algébrique. Démontrer que le résultat est égal à N.

(d'Ocagne.)

Nous allons démontrer que, si N est multiple de p, et si l'on fait abstraction des multiples de p, cette somme algébrique est égale à $\frac{p-1}{2}$ N, en prenant les $(p-1)$ premiers avec le signe +, etc.

Supposons $N = np$. Considérons la suite dans un ordre inverse, en affectant le premier groupe $1, 2, \ldots, p-1$ du signe +, le second du signe -1, etc. Je dis que l'on aura $(-1)^n \frac{p-1}{2} np$. Ce résultat est exact pour $n = 1$, $n = 2$. Il suffit de vérifier qu'il subsiste quand on remplace n par $n+1$. Or, dans ce cas, le résultat sera

$$(-1)^n\frac{p-1}{2}np+(-1)^{n+1}[(np+1)+(np+2)+(np+3)+\ldots(n+1)p-1]$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{p-1}{2}(n+1)p = (-1)^{n+1}\frac{p-1}{2}N';$$

en posant $$N' = (n+1)p.$$

NOTA. — Solutions par MM. Ignacio Beyens, capitaine du Génie à Cadix; A. Boutin, professeur au lycée de Courdemanche; l'abbé E. Gelin, professeur au collège Saint-Quirin, à Huy (Belgique).

QUESTION 250

Solution par M. Émile VIGARIÉ.

On considère un triangle OA_1B_1 *et le cercle* Δ_1, *de rayon* R_1 *circonscrit à ce triangle. On mène à* Δ_1, *une tangente anti-parallèle à* A_1B_1 *dans le triangle* OA_1B_1; *cette droite rencontre les côtés* OA_1, OB_1 *aux points* A_2, B_2.

On obtient ainsi un triangle OA_2B_2 *et, à ce nouveau triangle, correspond un cercle circonscrit* Δ_2 *de rayon* R_2.

Opérant sur OA_2B_2 *comme il vient d'être fait sur* OA_1B_1 *et ainsi de suite, on obtient une série de cercles*

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3 \quad \ldots \quad \Delta_p.$$

Démontrer : 1° que les centres des cercles

$$\Delta_1, \quad \Delta_3 \quad \ldots$$

sont distribués sur une droite OZ *et que ceux des cercles*

$$\Delta_2, \quad \Delta_4 \quad \ldots$$

sont aussi sur une droite OZ′ ;

2° *Que les rayons de trois cercles consécutifs* $\Delta_{p-2}, \Delta_{p-1}, \Delta_p$ *vérifient la relation de récurrence*

$$R_p R_{p-2} = R_{p-1}^2 ,$$

et déduire, de là, que

$$R_p = \frac{R_2^{p-1}}{R_1^{p-2}};$$

R_1 et R_2 *vérifiant d'ailleurs l'égalité*

$$R_2 h = 2R_1^2$$

dans laquelle h *désigne la hauteur issue de* O, *dans le triangle* OA_1B_1. (G. L.)

1° La tangente au cercle Δ_1, anti-parallèle à A_1B_1, est évidemment perpendiculaire à l'extrémité H_2 du diamètre passant par O. Comme les droites A_1B_1, A_3B_3... sont parallèles, les centres des cercles $\Delta_1, \Delta_3, \ldots$ se trouveront sur une même droite OZ qui est le diamètre du cercle Δ_1, passant par O.

Les droites A_1B_1, A_2B_2 sont anti-parallèles, le centre du cercle Δ_2 sera donc sur une droite OZ′ telle que

$$\text{angle } Z'OA_1 = \text{angle } ZOB_1 ;$$

ainsi OZ′ est la hauteur OH_1 du triangle A_1OB_1. Les droites A_2B_2, A_4B_4... étant parallèles entre elles, les centres des cercles Δ_2, Δ_4... seront sur une même droite OZ′.

Les droites OZ, OZ′ sont, par conséquent, *isogonales*

Plus généralement, si M_1M_2, M_3... M_p sont des points homo logues des triangles

$$A_1OB_1, \qquad A_2OB_2, \qquad A_3OB_3 \ldots A_pOB_p ;$$

les points M_1, M_3... seront sur une même droite OX, et les points M_2, M_4... seront sur une autre droite OX′, isogonale de OX.

2° Soient H_1 le pied de la hauteur issue de O, dans OA_1B_1, et H_2, H_3... H_p les points de contact des droites A_2B_2, A_3B_3... A_pB_p avec les cercles Δ_1, Δ_2... Δ_{p-1}. Les triangles H_1OH_2, H_2OH_3,... $H_{p-1}OH_p$ sont semblables et donnent :

$$\frac{OH_1}{OH_2} = \frac{OH_2}{OH_3} = \frac{OH_3}{OH_4} = \cdots = \frac{OH_{p-1}}{OH_p} = \frac{OH_p}{OH_{p+1}},$$

ou bien

$$(1) \qquad \frac{h}{2R_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_2}{R_3} = \cdots = \frac{R_{p-2}}{R_{p-1}} = \frac{R_{p-1}}{R_p}$$

Donc on a la relation :

$$R_pR_{p-2} = R_{p-1}^2$$

R_1 et R_2 vérifiant d'ailleurs l'égalité :

$$R_2h = 2R_1^2.$$

Si, maintenant, des deux derniers rapports (1), nous tirons la valeur de R_p, et que nous y remplacions successivement les quantités qui donnent son expression en fonction des valeurs tirées des rapports précédents, nous aurons la formule

$$R_p = \frac{R_2^{p-1}}{R_1^{p-2}}.$$

Plus généralement, si par les points M_1, M_3, ... on mène des droites parallèles, limitées aux cercles circonscrits Δ_1, Δ_3 ... (ou à toute autre figure F_1, F_3,..., ces figures étant homologues dans les triangles A_1OB_1, A_3OB_3 ...) et si, par les points M_2, M_4 ... on trace des anti-parallèles aux premières; d_1, d_2, d_3, d_4, ... étant les longueurs de ces droites, on aura les relations

$$d_pd_{p-2} = d_{p-1}^2,$$

$$d_p = \frac{d_2^{p-1}}{d_1^{p-2}}.$$

QUESTION 251

Solution.

Dans le triangle ABC, *les côtés* AB *et* AC *sont égaux,* I *est le point milieu de la base* BC. *On porte, sur le côté* BA, *de part et d'autre du point* A, *la longueur* $AA' = AA_1 = 2m$BA, *et, sur le côté* BC, *de part et d'autre du point* C, *une longueur* $CC' = CC_1 = m.BC$. *Démontrer que les perpendiculaires élevées à* AC,

A'C' et A_1C_1, aux points C, C' et C_1 se coupent sur la droite AI.
(G. Russo.)

La question 221, dont nous avons inséré une solution (*Journal*, p. 79), comprend celle-ci comme cas particulier.

Solutions diverses par MM. J. Chapron à Bragelonne, l'abbé E. Gelin, professeur au collège Saint-Quirin à Huy (Belgique); Sefa, à Constantinople.

QUESTION 252

Solution, par M. Sefa, à Constantinople.

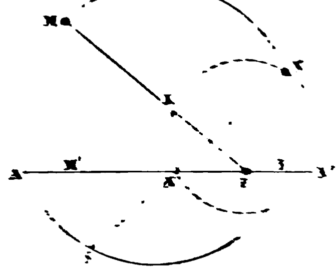
Étant donnés une circonférence O, *une corde* AB, *un point* P *sur cette corde et deux points* MN *sur la circonférence; trouver sur celle-ci un troisième point* S *qui soit tel, que les droites* SM, SN *coupent la corde* AB *en deux points* M', N', *de telle manière que le rapport* $\frac{PM'}{PN'}$ *soit égal à une quantité donnée* $\frac{m}{n}$.

(Ignacio Beyens.)

Supposons le problème résolu Soit:

$$\frac{PM'}{PN'} = \frac{m}{n}.$$

Par le point N', menons N'K parallèle à SM: traçons PN et prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre avec PM. Les triangles PN'K, PM'M donnent:



$$\frac{PK}{PM} = \frac{PN'}{PM'} = \frac{n}{m}.$$

D'ailleurs, $\widehat{NN'K} = \widehat{MSN}$; or ce dernier angle est connu puisqu'il a pour mesure la moitié de l'arc MN. On est donc conduit à la construction suivante:

Traçons PM, et prenons sur cette droite, à partir du point P, et dans le sens PM, la longueur PK, telle que $\frac{PK}{PM} = \frac{n}{m}$;

puis, sur NK décrivons un arc capable de l'angle S. L'intersection de cet arc avec AB donne deux points N', N'' et le problème est résolu.

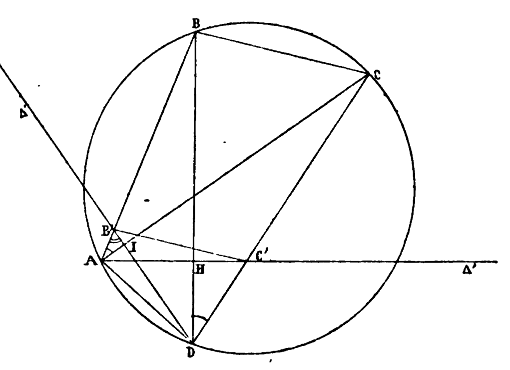
Il admet quatre solutions (réelles ou imaginaires) si l'on suppose, successivement, que les segments PM', PN' sont portés dans le même sens, ou en sens contraire.

QUESTION 254

Solution par M. Constantin Stéphanopoli, à Ajaccio.

Soient A, B, C, D, *quatre points situés sur un cercle; de* D, *on abaisse une perpendiculaire* Δ *sur* AC*; de* A, *on abaisse une perpendiculaire* Δ' *sur* BD. Δ *rencontre* AB *en* B'*;* Δ' *rencontre* CD *en* C'. *Démontrer que* B'C' *est parallèle à* BC.

Dans les triangles AB'I, DC'H, qui sont rectangles en I et H, les angles B'AI et C'DH sont égaux commeinscrits au même segment; par conséquent les angles AB'I et DC'H sont égaux, et le quadrilatère AB'C'D est inscriptible. Mais alors les angles B'C'D, BCD sont égaux comme ayant, l'un et l'autre, pour supplément BAD; les droites B'C', BC sont donc parallèles.



Nota. — Solutions analogues par MM. J. Chapron, à Bragelogne; G. Russo, à Catanzaro; E. Vigarié; Ignacio Beyens, capitaine du Génie, à Cadix; Alexandre Couvert, au lycée Condorcet; H. Gilly, à Nîmes.

Comme l'observe M. Chapron, le théorème subsiste en supposant que les droites Δ, Δ', sont inclinées du même angle α, sur les droites BD, CD.

La question 258, proposée par M. Catalan, généralise d'ailleurs la question précédente.

QUESTION 255

Solution par J. Chapron, à Bragelogne.

Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés et qui soit telle que les tangentes, menées d'un autre point, forment un angle donné 2α. (Ignacio Beyens.)

Soient (*) P le point de concours des tangentes, A l'un des points donnés, O le centre de la circonférence cherchée, C l'un des points de contact. Puisque l'on connaît $\widehat{CPO} = \alpha$, le triangle rectangle CPO reste constament semblable à lui-même; et le rapport $\frac{OP}{OC} = \frac{OP}{OA}$ est connu. Le point O fait donc partie du lieu des points tels que le rapport des distances de l'un d'eux, à deux points fixes A et P, est constant. On sait que ce lieu est la circonférence ayant pour diamètre le segment dont les extrémités partagent AP dans le rapport donné, etc.

QUESTION 256

Solution par M. J. M. Galban, élève à l'École polytechnique de Madrid.

Par un point quelconque H (*), *pris sur la base* BC *d'un triangle isoscèle* ABC, *on élève à cette base une perpendiculaire qui coupe* AB *en* B_1, *et* AC *en* C_1. *Démontrer que les symétriques du point* H, *par rapport aux milieux respectifs de* BB_1 *et* CC_1 *sont en ligne droite avec le sommet A.*

D'après la construction indiquée, les droites qui vont du point H aux milieux des segments BB_1, CC_1 sont parallèles aux côtés AC, AB du triangle ; la propriété en question revient donc à celle-ci :

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Soit BAC *un triangle quelconque ; par un point* H, *pris sur* BC, *on mène des parallèles aux droites* AB, AC ; *elles coupent celles-ci en* M, N ; *les symétriques* H′, H″ *de* H, *par rapport à* M *et à* N, *sont deux points situés en ligne droite avec le sommet* A.

En effet, MN coupe AH en un point K, milieu de AH ; la ponctuelle H′, A, H″ est donc homothétique de M, K, N ; puisque les points M, K, N sont en ligne droite, il en est de même des points H′, A, H″.

Solutions diverses par MM. G. Russo, à Catanzaro ; E. Vigarié ; A. Gilly, à Nimes.

MM. Boutin et J. Beyens observent que la propriété en question est projective ; il suffit de remplacer la hauteur considérée par la médiane correspondante, si ABC désigne un triangle quelconque ; c'est ce que prouve aussi la démonstration précédente.

QUESTIONS PROPOSÉES

293. — Résoudre les équations :

$$(1)\quad (2x+b+c)(2x+c+a)(2x+a+b) + (x+a)(x+b)(x+c) = 0.$$

$$(2)\quad 8(x+a)(x+b)(x+c) + (x+b+c-a)(x+c+a-b)(x+a+b-c) = 0.$$

$$(3)\quad 8(x+b+c-a)(x+c+a-b)(x+a+b-c) + (x+3a-b-c)(x+3b-c-a)(x+3c-a-b) = 0.$$

et trouver la *clef* qui permet de former, en nombre indéfini, les équations du même genre. *(G. L.)*

294. — On donne un cercle O, une corde fixe AB, et une corde CD de longueur constante, mais de position variable. On trace AC et BD, qui se coupent en S. Démontrer que le lieu du point S, et celui du centre du cercle circonscrit au triangle SCD sont deux figures égales. *(M. Fouché.)*

295. — Soient α, β, γ trois circonférences deux à deux tangentes aux points A, B, C, (A étant le point de contact de β et de γ, etc.).

Les droites CB, AB rencontrent β en des points P et Q; démontrer que PQ passe par le centre de β et qu'elle est parallèle à la ligne des centres des circonférences α et β.

(*Mayon*, professeur au collège de Blois.)

296. — Soient un triangle équilatéral ABC et une circonférence concentrique : tous les triangles dont les sommets sont les projections, sur les côtés de ABC, d'un point mobile sur cette circonférence ont même angle de Brocard.

(J. Neuberg.)

297. — Étant donnés, dans un même plan, deux triangles ABC, A'B'C', trouver trois masses α, β, γ, telles que si on les applique, soit en A, B, C, soit en A', B', C'. elles aient le même centre de gravité. *(J. Neuberg.)*

298. — Si deux triangles sont symétriques par rapport à un point, les transversales réciproques des côtés de l'un, par rapport à l'autre, sont concourantes. *(d'Ocagne.)*

299. — Par un point M du plan du triangle ABC mener les deux transversales réciproques qui passent par ce point. Dans quelles régions du plan doit se trouver M, pour que la solution soit réelle. *(E. Lemoine.)*

300. — Dans un triangle ABC mener deux droites réciproques parallèles : l'une, à une direction donnée; l'autre, à une autre direction donnée. *(E. Lemoine.)*

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMIN DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 20124-9-8.

DIVISIBILITÉ D'UN NOMBRE

PAR LE PRODUIT DE NOMBRES PREMIERS, FORMANT UN GROUPE DÉFINI

Application à la détermination des facteurs premiers, diviseurs d'un nombre donné.)

Par M. **Loir.**

Proposons-nous de diviser un nombre N, dont p représente la tranche de ses centaines, dizaines et unités, par un groupe de nombres premiers, donnant un produit terminé par 001. Ainsi :

$7.11.13 = 1001,$	$3.11.17.41 = 23001,$
$9.17.19.43 = 125001,$	$3.47.461 = 65001,$
$3.23.29 = 2001,$	$7.53.241 = 87001,$
$9.11.29.31 = 89001,$	$3.59.113 = 20001,$
$7.37.139 = 36001,$	$7.9.53.59 = 197001,$
. . . .	. . . .

$$x.y.z.u = \text{S}001.$$

Du nombre N, on retranche le produit de p, par le groupe choisi. Soit D la différence. On a

$$\text{N} - p(x.y.z.u) = \text{D}.$$

Si N est divisible par $(x.y.z.u)$, D le sera aussi. Réciproquement, si D est divisible par $(x.y.z.u)$ N le sera. D pourra être un nombre négatif; quand N aura une valeur plus petite que $p\ (x.y.z.u)$.

Soit p' la tranche des mille (centaines, dizaines et unités) du nombre D. Nous poserons

$$\text{D} - p'(1000)(x.y.z.u) = \text{D}'.$$

D étant divisible par $(x.y.z.u)$, D′ le sera.

Réciproquement, si D′ est divisible par $(x.y.z.u)$ D le sera; et, par suite, N.

Soit p'' la tranche des millions (centaines, dizaines et unités), du nombre D′. Nous poserons

$$\text{D}' - p''(1000)^2(x.y.z.u) = \text{D}''.$$

Puisque D′ est divisible par $(x.y.z.u)$, D″ le sera. Réciproquement, si D″ est divisible par ces facteurs, D′, D et N le seront.

On opèrera de même, sur les différences successives que l'on obtiendra, jusqu'à ce que l'on ait épuisé le nombre N.

Une de ces différences étant divisible par $(x.y.z.u)$, ou bien la dernière étant égale à zéro, les différences antérieures, en remontant, et par conséquent le nombre N, seront divisibles par $(x.y.z.u)$.

Nous avons dit que la différence D est négative, si l'on a N plus petit que $p(x.y.z.u)$. Dans ce cas, les différences successives D', D'', D'''... seront alternativement positives, négatives.

Montrons d'abord que D' sera positive. L'égalité qui donne D', puisque $1000p'$ est négatif, deviendra

$$D + p'1000(x.y.z.u) = D'.$$

Ajoutons cette égalité à la première

$$N - p(x.y.z.u) = D;$$

En simplifiant, on aura :

$$N + (x.y.z.u)(1000p' - p) = D'.$$

Mais comme p et p' sont compris entre 1000 et 1, la parenthèse est positive, donc D' est positive.

Je dis que la différence D'' sera négative. En effet, ajoutons les égalités qui donnent D, D', D'';

$$N - p(x.y.z.u) = D,$$
$$D + 1000\,p'(x.y.z.u) = D',$$
$$D' - 1000^2\,p''(x.y.z.u) = D'',$$

il viendra après simplification :

$$\big(N - p(x.y.z.u)\big) - 1000(x.y.z.u)(1000\,p'' - p') = D''.$$

Par hypothèse, le terme $N - p(x.y.z.u)$, du premier membre, est négatif; la parenthèse du second terme est positive, donc D'' est négative.

Ainsi de suite pour les autres différences.

Quotient du nombre N *par le produit des facteurs du groupe considéré.*

Reprenons la suite des égalités précédentes :

$$N - p(x.y.z.u) = D,$$
$$D - 1000p'(x.y.z.u) = D',$$
$$D' - 1000^2p''(x.y.z.u) = D'',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$D_{n-1} = K.1000^n(x.y.z.u).$$

En ajoutant, on aura :

$$N - (x\,y.z.u)(p + 1000p' + 1000^2p''...) + (x.y.z.u)K.1000^n;$$

d'où :

$$\frac{N}{x.y.z.u} = p + 1000p' + 1000^2p'' + \ldots + K.1000^n.$$

Si la dernière différence était nulle (K étant égal à zéro), le quotient serait

$$\frac{N}{x.y.z.u} = p + 1000p' + 1000^2p'' + \ldots$$

Si la dernière différence était, seulement, divisible par deux facteurs du groupe, par exemple $(z.u)$; cette dernière différence deviendrait $1000^nK.(z.u)$; D'après ce que nous avons vu, N serait divisible par $(z.u)$, et l'on aurait

$$\frac{N}{z.u} = (x.y)(p + 1000p' + 1000^2p'' + \ldots) + K.1000^n.$$

Dans cette égalité, le facteur K peut être négatif.

Règle pratique. — Afin de formuler une règle pratique, revenons à l'égalité

$$N - pS001 = D.$$

On peut l'écrire ainsi

$$(N - p) - pS.1000 = D.$$

La seconde égalité :

$$D - 1000p'S001 = D',$$

deviendrait $(D - 1000p') - p'S.1000^2 = D'$.

On sera donc conduit à la règle suivante :

Supprimer, du nombre donné N, la tranche de ses centaines, dizaines et unités, puis soustraire, des mille du nombre N_1, le produit, de la tranche supprimée, par le nombre S.

Opérer de même sur le nombre D; c'est-à-dire, supprimer la tranche des mille (centaines, dizaines et unités) de D; puis soustraire, des millions de D, le produit de la tranche supprimée, par le nombre S.

On continuera jusqu'à l'épuisement de N.

Si la dernière différence est nulle, le nombre N est divisible par tous les nombres premiers du groupe employé. Son quotient, par le produit de ces facteurs, sera donné, en plaçant, les uns à côté des autres, les chiffres des tranches supprimées, en commençant par ceux de la dernière.

Si la différence $n^{ième}$, à laquelle on s'arrête, n'est pas zéro, il sera facile de trouver les facteurs, du groupe employé, qui la divisent. Le nombre N contient ces mêmes facteurs; son quotient, par leur produit, s'obtient en multipliant, par les nombres premiers du groupe (non trouvés dans la différence essayée), le nombre formé avec les tranches supprimées, placées les unes à côté des autres; puis on ajoute ou on retranche (suivant le signe de K), le produit de 1000^n par ce multiple, K, des facteurs de cette $n^{ième}$ différence.

On reproduira la série des mêmes opérations, sur le quotient du nombre N, par les facteurs. du groupe employé, qui se divisent : soit avec le même groupe, pour reconnaître si les nombres déjà trouvés sont encore diviseurs du nombre N; soit avec de nouveaux groupes, afin d'achever la division; en ayant soin, à chaque nouvel essai, de prendre pour dividende, les divers quotients obtenus successivement.

Le dernier quotient renfermera les facteurs 2 ou 5, avec les nombres premiers, non compris dans les groupes dont on a fait usage. Ces nombres premiers feraient, du reste, toujours partie de groupes semblables, faciles à former, et l'on serait alors à même de constater leur présence, en essayant la suite des nombres premiers, les uns après les autres.

Nous allons, maintenant, développer quelques applications numériques des idées précédentes. *(A suivre.)*

SUR LE PREMIER CERCLE DE LEMOINE

Par M. **Émile Vigarié.**

1. Définition des cercles de Tucker. — Ces cercles sont susceptibles de plusieurs définitions (*).

(*) J. Neuberg. Note sur le centre des médianes antiparallèles (*Mathesis*, 1881, pp. 185-190).

Sur les cercles de Tucker (reprint, vol. XLIII, 1885, pp. 81-85).

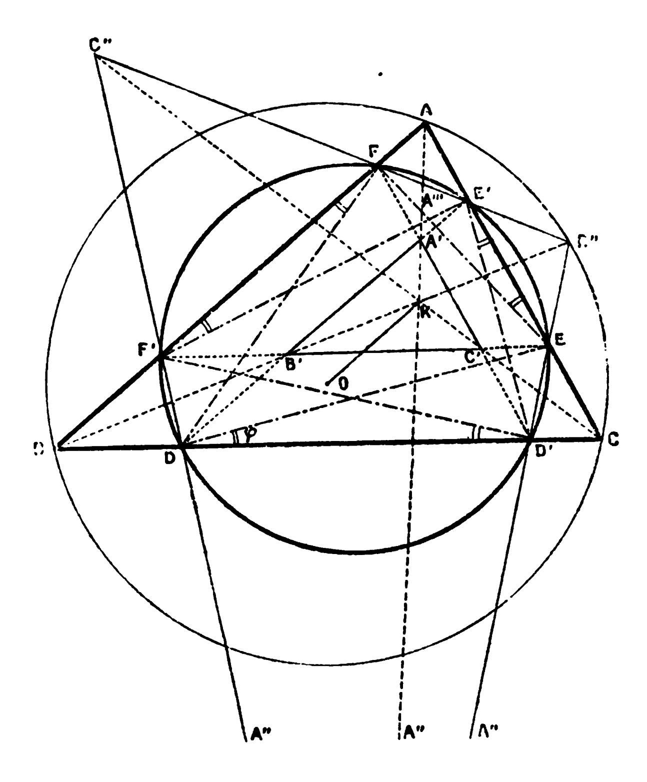
Équation générale des cercles de Tucker (J. S. 1886, p. 241).

E. Vigarié. Propriété générale des cercles de Tucker (J. E. 1886, pp. 195-198, 222-227).

E. Lemoine. Association française, Congrès de Lyon, 1873, p. 93, XII.

1° Si un triangle A'B'C' est homothétique avec le triangle de référence ABC, et que le point de Lemoine K soit le centre d'homothétie, les côtés des deux triangles se coupent en six points D, D', E, E', F, F' situés sur une même circonférence appelée, par M. Neuberg, *cercle de Tucker;* c'est avec cette définition que les cercles ont été rencontrés, pour la première fois, en 1873, par M. E. Lemoine.

2° Ces mêmes points résultent de l'intersection des côtés de



ABC avec les côtés d'un triangle A"B"C" dont les sommets sont sur les symédianes et dont les côtés sont parallèles aux côtés du triangle orthique, c'est-à-dire sont antiparallèles aux côtés de ABC.

3° Ce sont aussi les sommets de deux triangles DEF, D'E'F' semblables à ABC, et dont les côtés font le même angle φ avec les côtés de ABC.

$$\widehat{FEA} = \widehat{DFB} = \widehat{EDC} = \widehat{E'F'A} = \widehat{D'E'C} = \widehat{F'D'B} = \varphi.$$

4° Si Ω et Ω_1 sont les deux points direct, et rétrograde, de Brocard du triangle ABC, Ω ayant pour coordonnées normales $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{a}{b}$ et étant tel que les angles $\widehat{\Omega AC}$, $\widehat{\Omega BA}$, ΩCB sont égaux; si, de plus, nous appelons avec M. Neuberg, *faisceaux de Brocard*, les groupes de droites ($\Omega A, \Omega B, \Omega C$)($\Omega_1 A$, $\Omega_1 B$, $\Omega_1 C$), l'on peut énoncer, comme il suit, un mode de génération des cercles de Tucker.

Si l'on fait tourner les deux faisceaux de Brocard autour de leurs centres d'un même angle μ, mais en sens contraire, chaque rayon des faisceaux rencontre le côté dont les deux sommets sont : lesommet d'où part le rayon et le sommet qui la suit dans le sens de la rotation du rayon, en six points d'un cercle de Tucker.

L'équation générale des cercles de Tucker en coordonnées normales est :

$$\Sigma \frac{yz}{b^2c^2} - \lambda . \Sigma x . \Sigma \left(\frac{1}{a^2} - \lambda\right) x = 0.$$

L'interprétation de la valeur de λ qui correspond aux quatre modes de génération que nous venons d'indiquer est :

1° $\lambda = \frac{AA'}{(a^2 + b^2 + c^2)AK} = \frac{\varepsilon_1 + 1}{4S \operatorname{cotg} \omega}$,

en appelant ε_1 le rapport d'homothétie de A'B'C' et de ABC, ω l'angle de Brocard et S l'aire de ABC.

2° $\lambda = \frac{2AA'''}{(a^2 + b^2 + c^2)AK} = \frac{2(1 - \varepsilon_2)}{4S \operatorname{cotg} \omega}$,

en appelant A''' l'intersection de AK et de B''C'', ε_2 le rapport d'homothétie de A''B''C'' et du triangle formé par les tangentes en A, B, C au cercle circonscrit.

3° $\lambda = \frac{1}{2S(\operatorname{cotg} \varphi + \operatorname{cotg} \omega)}$.

4° $\lambda = \frac{\sin \mu}{n^2 \sin (\mu + \omega)}$ où $n^2 = \sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}$.

2. Cas particuliers des cercles de Tucker. — 1° Si ε_1 diminue jusqu'à zéro, les trois côtés du triangle A'B'C' se réduisent aux trois parallèles menées, par le point de Lemoine, aux côtés de ABC; les points D, E, F, D', E', F', sont alors sur un cercle L_1 appelé : *premier cercle de Lemoine.*

2° Si ε_2 diminue jusqu'à zéro, les côtés de A'B'C' se réduisent aux trois antiparallèles aux trois côtés, menées par le point de Lemoine. Chacune d'elles coupe alors les deux autres côtés en deux points F et E', D et F', E et D'. Ces six points appartiennent à un cercle qu'on appelle : *second cercle de Lemoine.*

3° Si A'B'C' devient le triangle Δ complémentaire du triangle orthique, Δ étant obtenu en joignant deux à deux les milieux des côtés du triangle orthique; alors, D, E, F, D', E', F' deviennent les projections orthogonales sur les côtés de ABC, des pieds des hauteurs. Ces points sont sur un cercle, appelé *cercle de Taylor.*

Ce sont là trois cas intéressants que nous allons étudier.

PREMIER CERCLE DE LEMOINE

Bibliographie.

E. Lemoine. — 1° Sur le centre des médianes antiparallèles (A. F. *Lyon*, 1873; *Lille*, 1874; *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1873, p. 264).

2° Question 192 (*Mathesis*, 1882, p. 230).

3° Sur les antiparallèles aux côtés d'un triangle (*Mathesis*, 1884, p. 202).

J. Neuberg. — 4° Note sur le centre des médianes antiparallèles (*Mathesis*, 1881, p. 185 et 190).

5° Sur les cercles de Tucker (*Reprint*, vol. XLIII, 1885, p. 81-85).

6° Équation générale des cercles de Tucker (J. S. 1886, p. 241).

R. Tucker. — 7° The triplicate ratio circle (*Quarterly journal of pure and applied mathematics*, vol. XIX, n° 76, 1883, pp. 342-349).

8° A group of circles (*Quarterly journal*, vol. XX, n° 77).

9° The triplicate ratio circle (*Appendix to the Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XIV, n° 214).

H. Brocard. — 10° Nouvelles propriétés du triangle (A. F. Rouen, 1883; J. E. 1883).

J. Casey. — 11° Appendix of the London Math. Society, vol. XIV, n° 214.

12° *A Treatise on conic sections* (1885, pp. 34, 104, 107, 304).

13° *A Sequel to Euclid* (4e édition, 1886, pp. 178-181).

H. M. Taylor. — Relations of the intersections of a circle with a triangle (*Proceedings of the London Math. Soc.*, vol. XV, n° 222, 223, pp. 112-139, février 1884).

T. C. Simmons. — 15° Companion to the weekly problem papers, by Rev. J. J. Milne, 1888, pp. 112-120.

Le premier cercle de Lemoine L_1 a été signalé, ainsi que nous l'avons dit, pour la première fois par M. Lemoine (1873); puis, étudié par M. J. Neuberg (1881). M. Tucker ne connaissant pas les travaux précédents publia sur ce sujet (1883) une fort intéressante étude; depuis cette époque, le cercle L_1 a été l'objet de nombreux Mémoires.

3. — Désignons par B_a, C_a les intersections avec BA et CA de la parallèle à BC, menée par le point K de Lemoine;

Par C_b, A_b les intersections avec CB et AB de la parallèle à CA;

Par A_c, B_c les intersections avec AC et BC de la parallèle à AB;

Nous savons que les six points B_a, C_a, C_b, A_b, A_c, B_c sont sur le premier cercle de Lemoine. De ce que le premier cercle de Lemoine est un cercle de Tucker, on conclut (*) immédiatement que:

1° Son centre est au milieu de la droite KO qui joint le point de Lemoine au centre du cercle ABC, c'est-à-dire qu'il est concentrique au cercle de Brocard.

2° Les longueurs A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b sont égales, leur longueur commune est

$$\frac{abc}{a^2+b^2+c^2}.$$

3° Les triangles $A_cB_aC_b$, $A_bB_cC_a$, semblables à ABC, sont égaux;

(*) Voir propriétés générales des cercles de Tucker (J. E. 1886, pp. 195-198; 222-227).

de plus l'angle φ que leurs côtés forment avec les côtés homologues de ABC, est égal à l'angle ω de Brocard; en effet, si l'on se reporte aux valeurs de λ données précédemment pour les diverses définitions des cercles de Tucker, on voit en égalant la première et la troisième et en observant que nous avons ici $AA' = AK$:

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{2S(\cot\varphi + \cot\omega)},$$

mais :

$$\cot\omega = \frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2},$$

d'où

$$\cot\varphi = \cot\omega.$$

4° Les triangles ABC, $A_cB_aC_b$ ont un point de Brocard commun et même angle de Brocard; le point rétrograde de ABC Ω_1 est le point direct de $A_cB_aC_b$, c'est-à-dire que l'on a :

$$\widehat{\Omega_1AC} = \widehat{\Omega_1BA} = \widehat{\Omega_1CB} = \widehat{\Omega_1A_cB_a} = \widehat{\Omega_1B_aC_b} = \widehat{\Omega_1C_bA_c}.$$

De même, ABC, $A_bB_cC_a$ sont tels que le point direct de ABC est le point rétrograde de $A_bB_cC_a$.

5° Le point de Lemoine est le centre radical des cercles CBA_cA_b, BAC_aC_b, ACB_aB_c.

6° Le premier cercle de Lemoine et le cercle circonscrit ont pour axe radical la ligne de Pascal (*) du premier hexagone de Lemoine, cette droite est la polaire du point de Lemoine par rapport au premier cercle de Lemoine; elle est perpendiculaire à KO, c'est-à dire parallèle à la droite de Lemoine; son équation est

$$\sum \frac{x(b^2 + c^2)}{a} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\omega = 0,$$

sous une forme non homogène en x, y, z.

4. — On trouve facilement, en posant $m^2 = a^2 + b^2 + c^2$:

$$CC_b = \frac{b^2a}{m^2}; \quad BB_c = \frac{c^2a}{m^2}; \quad B_cC_b = \frac{a^3}{m^2}; \quad CB_c = \frac{a(a^2 + b^2)}{m^2};$$

$$BC_b = \frac{a(a^2 + c^2)}{m^2};$$

et les expressions analogues pour les autres côtés.

(*) M. J. Casey appelle premier hexagone de Lemoine le polygone ayant pour sommets les points d'intersection du triangle ABC avec le premier cercle de Lemoine (*A Sequel to Euclid 1886*, p. 180).

L'égalité $$B_cC_b = \frac{m^2}{a^3}$$
montre que : *les cordes interceptées, par le premier cercle de Lemoine, sur les côtés du triangle* ABC *sont proportionnelles aux cubes des côtés* (*).

Le rapport d'homothétie des deux triangles $A_cB_aC_b$ (ou $A_bB_cC_a$) et ABC est $\frac{n^2}{m^2}$. On en déduit immédiatement les côtés, le périmètre, la surface, etc. des triangles $A_cB_aC_b$, $A_bB_cC_a$.

En appliquant les formules précédentes, on conclut que :

La somme des aires des triangles AA_bA_c, BB_aB_c, CC_bC_a *est équivalente à l'aire des triangles* $A_cB_aC_b$, $A_bB_cC_a$.

On trouverait facilement le périmètre du premier hexagone de Lemoine, son aire, etc.

Si l'on joint le point de Lemoine K à tous les sommets du premier hexagone de Lemoine les six triangles qui ont K pour sommet et pour base un des côtés de l'hexagone, sont semblables à ABC.

M. Lemoine nous a communiqué le théorème suivant :

La conique inscrite au premier hexagone de Lemoine a pour équation $\Sigma\sqrt{a(b^2+c^2)x} = 0$; *son centre a pour coordonnées :* $\frac{m^2+a^2}{a}, \frac{m^2+b^2}{b}, \frac{m^2+c^2}{c}$; *c'est-à-dire qu'il est sur la droite qui joint le barycentre au point de Lemoine ; le point de Gergonne de cette conique, a pour coordonnées* $\frac{1}{a(b^2+c^2)}$, *etc., c'est l'inverse du milieu de la ligne qui joint les points de Brocard.*

5. — Équation du premier cercle de Lemoine L_1.

— C'est le cercle de Tucker pour lequel on a $\lambda = \frac{1}{m^2}$ (voir §1).

M. Tucker a donné son équation sous la forme :
$$\Sigma a^3yz - Sabc \operatorname{tg}\omega - abc\Sigma a^2 = 0$$

(*) C'est cette propriété qui a suggéré à M. Tucker l'idée de donner au dremier cercle de Lemoine, le nom de *triplicate ratio circle*, et c'est, pour ce motif qu'on le désigne en Angleterre le plus souvent par les lettres « T. R. »

qui, rendue homogène, est

$$\Sigma a^3yz + R \operatorname{tg} \omega(\Sigma ax)^2 - abc\Sigma x^2 = 0.$$

On sait que le demi petit axe et le demi grand axe de l'ellipse de Brocard sont, respectivement :

$$2R \sin^2 \omega, \qquad R \sin \omega;$$

et son excentricité

$$\varepsilon = (1 - 4 \sin^2 \omega)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon^2 = \frac{\cos 3\omega}{\cos \omega}.$$

Cela posé, si l'on observe que

$$1 + \varepsilon^2 = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{n^4},$$

que le rayon ρ du cercle de Brocard est

$$\rho = \frac{R\varepsilon}{2 \cos \omega};$$

en appelant ρ_1 le rayon du premier cercle de Lemoine, on a :

$$\rho_1^2 = \frac{R^2}{3 + \varepsilon^2}, \qquad \text{et} \qquad \rho = \rho_1 \varepsilon;$$

$$\rho^2 \cos \omega = \rho_1^2 \cos 3\omega \quad \text{et} \quad 3\rho_1^2 + \rho^2 = R^2.$$

Soient A′, B′, C′ les intersections de A_bC_a et A_cB_a de B_cA_b et B_aC_b, de C_aB_c et C_bA_c. Les deux triangles $C'C_bB_c$, $C'C_aA_c$ étant homothétiques et le rapport d'homothète étant

$$\frac{C_bB_c}{C_aA_c} = \frac{a^3}{b^3},$$

on en conclut que l'équation de CC′ est $\frac{x}{y} = \frac{a^3}{b^3}$ etc. et par suite que les trois droites AA′, BB′, CC′ se coupent au point D_2 : a^3, b^3, c^3. Les deux triangles ABC, A′B′C′ sont donc homologiques et ont pour centre d'homologie le point inverse du point D premier centre d'homologie de ABC et du premier triangle de Brocard ; on peut encore dire que D_2 est le pôle de ΩΩ′ par rapport au cercle de Brocard.

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. G. de Longchamps.

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 217.)

101. Le tir sur le but partiellement invisible (*). — Nous examinerons d'abord le cas particulier où, un point B étant visible, on veut tirer sur un but invisible : 2, 4, 8,. . fois plus éloigné du centre de la batterie que le point B. La propriété sur laquelle nous allons nous appuyer a été déjà signalée (Première partie, § 128); mais nous allons la rappeler et la démontrer.

Prenons, dans le voisinage de O, un point M tel que OMB soit un angle droit; prolongeons MO d'une longueur égale OM', puis élevons à MM', en M', une perpendiculaire qui rencontre en A la perpendiculaire à OB, au point O. Si, de M, on vise le point A, la perpendiculaire MC, à AM, va couper OB en C. Cela posé, on a OC = 2OB.

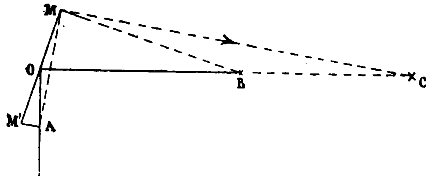


Fig. 273.

Pour le démontrer, observons que les triangles MBC, MOA ont leurs côtés perpendiculaires deux à deux; ils sont donc semblables, et nous avons

$$(1) \qquad \frac{BC}{MB} = \frac{OA}{OM}.$$

(*) Pour qu'un but soit bien déterminé, il faut qu'il soit visible de deux points au moins, pour l'observateur qui se déplace sur le terrain accessible. S'il n'est visible que d'un point seulement, nous traduisons ce fait, faute d'une expression meilleure, en disant qu'il est *partiellement invisible*. Enfin s'il arrive que le but ne puisse être aperçu, quelle que soit la position que peut prendre l'observateur, hypothèse examinée plus loin, nous dirons alors qu'il est *complètement invisible*.

D'autre part, les triangles rectangles OMB, OM'A semblables, eux aussi, donnent

$$(2) \qquad \frac{OB}{OA} = \frac{MB}{OM'}.$$

En comparant les égalités (1) et (2) et en observant que OM' = OM, on voit que

$$BC = OB.$$

Ainsi, les projectiles d'une batterie placée en M, dont le tir serait dirigé perpendiculairement à MA, comme l'indique la figure iraient frapper un but invisible, situé en C, point symétrique de O par rapport à B.

En opérant avec MC, comme nous l'avons fait avec MB, on pourrait régler le tir d'une ou de plusieurs batteries dont les feux convergeraient vers un but C', invisible, et tel que OC' = 4OB. etc.

Dans cette construction, il n'est pas inutile de le remarquer, B sert uniquement comme point de visée ; il peut être très éloigné de O. Mais les alignements nécessaires à la détermination de MC portent uniquement sur les points M, M', A, qui peuvent être aussi rapprochés de O que l'on voudra.

102. La solution par la fausse équerre. — Le but est placé en B ; on le suppose visible, du point A, mais on admet que, pour des raisons diverses, dans le détail desquelles il est inutile d'entrer ici, on veuille placer la batterie en un certain point C différent de A. Dans ces conditions, on propose de déterminer la ligne de visée CB.

Dans la partie du terrain qui est accessible, jalonnons une droite Δ ; et, après avoir relevé l'angle BAC avec la fausse équerre, cherchons, sur Δ, le point M d'où l'on voit BC sous un angle BMC = BAC. Revenons au point A ; et, avec la fausse équerre, relevons maintenant l'angle BAM. L'instrument donne, en même temps, un angle α supplémentaire de BAM; c'est celui-ci que nous allons considérer. Ayant transporté la fausse équerre en C, visons le point M avec une des branches de l'instrument; l'autre branche, celle qui est inclinée sur la première de l'angle α, détermine la direction inconnue.

Il existe, il est vrai, deux droites partant de C et faisant avec CM l'angle α en question; mais, dans la pratique, cette ambiguité ne saurait exister parce qu'on sait de quel côté par rapport à CM, se trouve le but invisible.

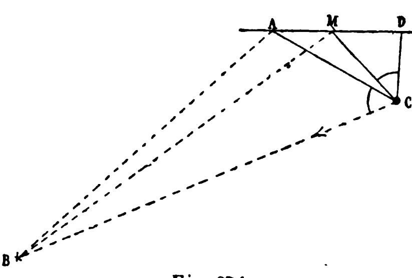


Fig. 274.

Pour mesurer la distance CB, on pourrait déterminer d'abord les distances AB, MB, comme nous l'avons indiqué précédemment (chap. IV); puis, on appliquerait le théorème de Ptolémée au quadrilatère BAMC. Mais ce procédé serait beaucoup trop long; il est préférable d'opérer de la manière suivante.

Ayant relevé l'angle BCA, ce qui est possible puisque la direction de CB est maintenant connue, on tire un alignement CD, de telle sorte que MCD = BDA. Le quadrilatère BCMA étant inscriptible, CMD = ABC; les triangles ABC, MCD sont donc semblables, et l'on a

$$BC = MC \cdot \frac{AC}{CD}.$$

103. La solution par les alignements. — Le but, placé en B, est supposé visible des points A, C; il est au contraire invisible de M, point situé sur AC et l'on veut établir la ligne de visée qui, partant de M, aboutit au point B.

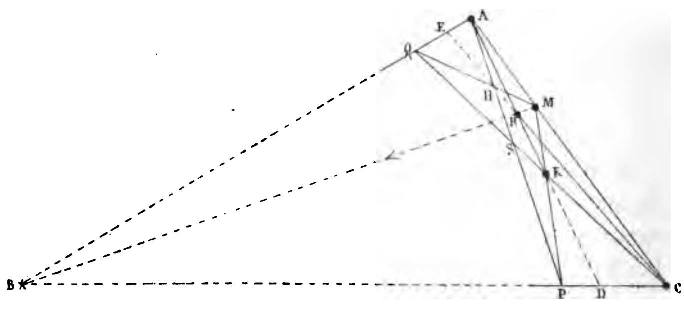


Fig. 275.

Dans la partie des alignements AB, CB, qui est accessible, on prend : deux points P, Q et l'on effectue la construction indiquée par la figure. On trouve ainsi un point R; MR est la ligne cherchée.

Pour établir, en peu de mots, ce théorème; formons la perspective de la figure 275, de façon à rejeter à l'infini la droite AMC; nous obtenons alors la *fig. 276* ; aux quadrilatères BQSP, HSKR, correspondent les parallélogrammes B'Q'S'P', H'S'K'R'; aux droites QH, PK, les parallèles Q'H', P'K' et il faut démontrer que B'R' est parallèle à la direction commune des droites Q'H', P'K'.

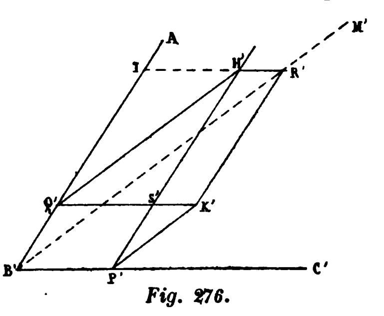


Fig. 276.

En effet, les triangles semblables Q'S'H', P'S'K' donnent

$$\frac{S'K'}{S'P'} = \frac{S'Q'}{S'H'},$$

ou

$$\frac{H'R'}{B'Q'} = \frac{H'I}{Q'I}.$$

Dans le triangle B'IR', Q'H' partage les côtés en IR', IB', en segments proportionnels; Q'H' est donc parallèle à B'R'. La construction indiquée plus haut se trouve ainsi justifiée.

Si nous revenons à la figure (275), on peut demander de calculer la longueur MB. A cet effet, on pourra considérer le triangle ABC et les droites AD, CE, BM qui, dans ce triangle concourent en R. Le théorème de Gergonne *(première partie*, § 1) donne

$$\frac{MR}{MB} + \frac{DR}{DA} + \frac{ER}{EC} = 1.$$

A l'exception de MB, toutes les longueurs qui entrent dans cette égalité peuvent être obtenues par des chaînages; on pourra donc calculer la distance inconnue qui sépare, du but, la position de la batterie.

104. La solution par l'équerre ordinaire. — Désignons toujours, par B, le but qui n'est pas visible du point M

où l'on veut établir la batterie. Choisissons, dans les régions accessibles, deux points A, C d'où l'on aperçoit BM sous des angles droits; les angles C'MC, A'MA, MC'R, MA'R étant droits, MR représente la ligne de visée.

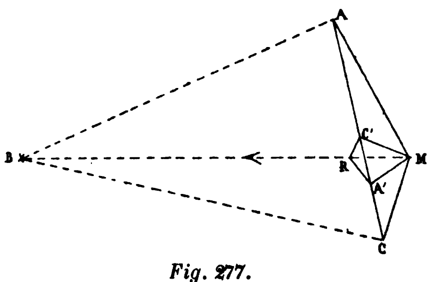


Fig. 277.

En effet, nous avons C'MR = C'A'R' = MAC = MBC = C'MB : les trois points M, R, B sont donc en ligne droite.

Quant à la distance MB, on peut la calculer en observant que les deux quadrilatères MABC, MA'C'R sont semblables; on a donc

$$MB = MR.\frac{MC}{MC'}.$$

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. EMMERICH, *à Mülheim-sur-Ruhr (Prusse).*

... Voici quelques théorèmes se rapportant à la nouvelle géométrie du triangle; leur démonstration ne sera peut-être pas sans intérêt pour les lecteurs de votre estimé journal.

1. *Étant donné un triangle* ABC, *si l'on construit un triangle* PQR *avec* PQ = a *sin* B, QR = c *sin* C, *angle* PQR = π − C; *l'angle* R *sera égal à l'angle de Brocard du triangle* ABC.

A. L. Crelle. — Voir : *Ueber einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks rücksichtlich dreier durch die Winkelspitzen gezogenen geraden Linien.* Berlin, 1816. — On trouve, dans ce livre, une étude du premier point de Brocard et les formules célèbres

$$\text{cotg } \omega = \text{cotg A} + \text{cotg B} + \text{cotg C}$$
$$\text{coséc } \omega^2 = \text{coséc A}^2 + \text{coséc B}^2 + \text{coséc C}^2.$$

2. *Le triangle formé par les centres des cercles qui passent par deux sommets d'un triangle* ABC *et par l'un des points de Brocard*

(disons par Ω) est égal à un triangle dont les côtés passent par les sommets du triangle primitif et *qui forment des angles égaux à* $\frac{1}{6}\pi$ *avec* AΩ, BΩ, CΩ, *du même côté que celui où est situé l'angle* ω.

C. F. A. Jacobi. — Voir : *De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis.* Numburgi, 1825. — Programme scolaire qui continue les études commencées par Crelle et Feuerbach.

3. *Les cercles tangents à* AB *et* AC *en* A *passant respectivement par* C *et* B, *coupent* BC *en* D *et* D′. *Les droites* AB, AD, AD′, AC *forment un faisceau harmonique lorsque* $2a \sin 2A = h_a$.

A. Wiegand. — Voir : *Ein mathematisches Thema aus der Schule.* Halle, 1854.

4. *Les droites* AB, AΩ, AΩ′, AC *forment un faisceau harmonique lorsque* $a^4 = 2b^2c^2$.

G. Emsmann. — Voir : *Ueber einen merkwürdigen Punkt im Dreiecke.* Halle, 1855. — Étude des points de Brocard qui contient, entre autres, les expressions de AΩ, AΩ′, ΩΩ′ et des angles de ΩΩ′ avec les côtés, en fonction des côtés.

Extrait d'une lettre de M. A. Poulain.

... Du reste, je ne suis pas étonné que tout le monde s'embrouille dans ces formules relatives aux points de Brocard (voir *J. E.*, 1888. p. 51 et suivantes). Cela tient à une situation qui est peut-être inextricable. Il y a un des deux points qui doit s'appeler *direct*, si on le définit par rapport au point de Lemoine, car alors les mouvements se font de A en B. Mais, par malheur, si on le définit par ses angles ω, c'est juste le contraire. Ce qui complique l'affaire, c'est que le mot *positif* correspond à *rètrograde*, ce qui renverse les habitudes; et que le point qui est le plus important, comme étant le premier défini (par ses angles), s'appelle *rètrograde;* or, on est habitué à reléguer au deuxième rang les grandeurs rétrogrades...

Nota. — Les observations précédentes sont fort justes, mais la situation que nous signale ici M. Poulain, n'est pas, heureusement, inextricable.

La terminologie doit, à notre avis, se rattacher aux expressions des coordonnées des points que l'on y considère ou aux équations des éléments (droites, cercles, courbes remarquables, etc...) associés au triangle de référence. Je reviendrai, d'ailleurs, sur ce sujet, dans le prochain numéro, à propos d'une autre note de M. Poulain.

Pour la dénomination des points de Brocard, c'est M[lle] Scott (*loc. cit.*; p. 54), qui me paraît avoir proposé les termes les meilleurs. J'expliquerai les raisons de cette préférence, en peu de mots.

Si l'on considère les trois lettres

(1) $A, \quad B, \quad C;$

l'idée fondamentale de la géométrie Brocardienne, abstraction faite d'une particularité sur laquelle je reviendrai tout à l'heure, consiste à effectuer sur ces lettres une permutation circulaire; ce qui donne le tableau :

(2) $B, \quad C, \quad A;$

(3) $C, \quad A, \quad B.$

Par exemple, si A, B, C, désignent les coordonnées d'un point M, on obtient ainsi deux points associés M', M'', dont les coordonnées sont respectivement représentées par (2) et (3).

C'est ainsi que, en partant du point a^{-2}, b^{-2}, c^{-2} (*coordonnées barycentriques*), *réciproque du point de Lemoine*, on a deux points

(4) $b^{-2}, \quad c^{-2}, \quad a^{-2}$

(5) $c^{-2}, \quad a^{-2}, \quad b^{-2}$

qui doivent être dénommés *premier point de Brocard*, pour (4); et *second point de Brocard*, pour (5).

De même, si l'on considère un élément (droite, cercle, etc...) représenté par

$$f(A, B, C) = 0;$$

le *premier* élément Brocardien, associé à celui-ci, correspond à l'équation

$$f(B, C, A) = 0;$$

le *second*, à

$$f(C, A, B) = 0.$$

Toute confusion disparaît alors; parce que la permutation circulaire détermine sans ambiguïté, quel est le premier et quel est le second élément Brocardien.

Je sais bien, et je reviens ici sur le point que j'ai réservé, qu'on a l'habitude, pour définir les points de Brocard, de partir du point de Lemoine

$$a^2, \quad b^2, \quad c^2.$$

Mais, outre que la chose n'est nullement obligatoire, elle n'est pas en contradiction avec la convention simple et naturelle que Mlle Scott avait proposée et à laquelle il me paraît utile de se rallier, si l'on veut éviter, dans l'avenir, toute confusion. G. L.

QUESTIONS D'EXAMEN (*)

(SAINT-CYR, 1888)

1. — Démontrer que si, entre les angles A, B d'un triangle, on a la relation

$$(1) \qquad \sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2},$$

ce triangle est isoscèle.

(*) Les énoncés de ces questions sont empruntés au recueil : *Examens d'admission à l'école spéciale militaire de Saint-Cyr*, publié par la librairie Croville-Morant, 20, rue de la Sorbonne.

La relation (1) peut être mise sous la forme :

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}=\operatorname{tg}\frac{B}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}},$$

ou

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{B}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right).$$

On peut encore l'écrire ainsi :

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)=0.$$

Le second facteur, égalé à zéro, n'admet que des racines imaginaires ; on a donc simplement,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\operatorname{tg}\frac{B}{2};$$

et, par conséquent, $\frac{A}{a}=\frac{B}{2}+k\pi,$

ou, enfin $A=B+2k\pi.$

A, B désignant les angles d'un triangle, la seule solution acceptable est

$$A=B.$$

2. — Vérifier que l'on a

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{70}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{83}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{447}\ (*).$$

On posera

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{70}=u,\qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{83}=v,\qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{447}=w.$$

On a donc à vérifier que

$$u=v+w$$

ou que

$$\operatorname{tg}u=\operatorname{tg}(v+w).$$

On a, en effet,

$$\frac{1}{70}=\frac{\frac{1}{83}+\frac{1}{447}}{1-\frac{1}{83.447}}=\frac{530}{37100}.$$

3. — Trouver la somme y des termes de la progression géométrique

$$\sin x+\sin x(2\cos x)+\sin x(2\cos x)^2+\ldots$$

La raison $2\cos x$ devant être comprise entre $+1$ et -1, il faut supposer (x étant plus petit que $\frac{\pi}{2}$, pour fixer les idées) que x est compris entre 60° et 90°.

Dans cette hypothèse, on a

$$y=\frac{\sin x}{1-2\cos x}=\frac{\sin x}{4\sin\left(30+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-30\right)}.$$

(A suivre.)

(*) *Arc tg* α, veut dire l'arc compris entre $+\frac{\pi}{1}$ et $-\frac{\pi}{2}$ dont la tangente est égale à α.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

(JUILLET 1887)

RENNES

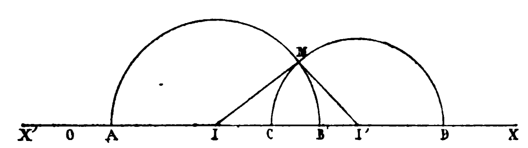
1. — Deux forces P et Q sont appliquées aux extrémités d'un fil mobile sur une poulie fixe. Les deux directions du fil, qui sont aussi celles des forces, font entre elles un angle 2α.

Donner la condition d'équilibre et évaluer la pression supportée par l'axe de la poulie.

2. — Sur une droite indéfinie X'X et à partir d'un point fixe O, pris sur cette droite, on porte deux longueurs OA,OB égales aux racines de l'équation $ax^2 + 2bx + c = 0$, et deux autres longueurs OC,OD égales aux racines de l'équation $a'x^2 + 2b'x + c' = 0$. Soient I le milieu de AB; I' celui de CD.

1° Calculer OI et AB, OI' et CD,

2° On décrit deux demi-circonférences ayant pour diamètres, l'une AB,



l'autre CD. On joint les points I et I' au point de rencontre M des deux demi-circonférences. Etablir la formule :

$$\cos \mathrm{IMI'} = \frac{2bb' - ac' - ca'}{2\sqrt{b^2 - ac}\sqrt{b'^2 - a'c'}};$$

3° Trouver la relation qui existe entre a, b, c, a', b', c', pour que l'angle IMI' soit droit; et, dans ce cas, prouver géométriquement que l'on a la relation $\overline{\mathrm{IB}}^2 = \mathrm{IC} \times \mathrm{ID}$.

CAEN

1. — Démontrer que, dans tout angle trièdre, une face est plus petite que la somme des deux autres.

2. — Calculer la valeur des poids égaux d'une machine d'Atwood, sachant que, sous l'action d'un poids additionnel de 3^{gr}, l'espace parcouru dans les deux premières secondes a été $1^m,367$. — On prendra $g = 9^m,8$.

3. — Etant donné un triangle ABC dont on connaît les trois côtés a, b, c : sur le côté BC et son prolongement, on prend deux points M et N, tels que $\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MC}} = \frac{\mathrm{NB}}{\mathrm{NC}} = \frac{p}{q}$. Calculer, en fonction de a, b, c, p et q, les longueurs

MB, MC, NB, NC, AM, AN, ainsi que le cosinus de l'angle MAN. — Vérifier les formules en y faisant d'abord $\frac{p}{q}=1$ puis $\frac{p}{q}=\frac{c}{b}$.

Énoncer les théorèmes de géométrie auxquels on sera conduit.

QUESTION 259

Solution par M. H. Gilly, à Nîmes.

Par le centre O *d'un cercle* C (*), *on fait passer une circonférence quelconque* C′, *de centre* O′. *On mène, au cercle* C, *une tangente qui coupe le cercle* C′ *aux points* A *et* B. *Démontrer que les secondes tangentes, menées des points* A *et* B, *au cercle* C, *se coupent sur la ligne des centres* OO′. (d'Ocagne.)

Soit A′ le point où la tangente, issue de B, coupe C′.

La droite BO est bissectrice de ABA′ ; par suite, les arcs OA, OA′ sont égaux. Les points A, A′ étant situés symétriquement par rapport à la ligne des centres OO′, les tangentes au cercle C, issues de ces points, se coupent sur la perpendiculaire abaissée de O sur AA′, c'est-à-dire sur la ligne des centres OO′.

QUESTION 265

Solution par M. Lavieuville, professeur au Collège de Dieppe.

Si quatre points A, B, C, D *rangés sur une droite, dans l'ordre indiqué par les lettres, sont conjugués harmoniques : O désignant le milieu de* CD, *on a :*

(A) $\qquad OB.AC.AD = OA.BC.BD \qquad$ (G. L.)

Les quatre points A, B, C, D formant une division harmonique, on a

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

$$(1)\qquad \frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{AD + AC}{AC.AD} = \frac{2AO}{AC.AD},$$

et

$$(2)\qquad \frac{2}{BA} = \frac{1}{BC} - \frac{1}{BD} = \frac{BD - BC}{BC.BD} = \frac{2OB}{BC.BD}$$

En comparant (1) et (2), on a l'égalité proposée (A).

NOTA. — Autres solutions par MM. Russo à Catanzaro; Ignacio Beyens capitaine du génie à Cadix; Ch. Biermann, ancien élève de l'École polytechnique, ingénieur à Montauban; Boutin, professeur au collège de Courdemanche.

M. Biermann, après avoir établi la réciproque de la proposition énoncée, ajoute les réflexions suivantes.

Appelons *conjoints* les segments CD et AB liés par une partie commune BC; et *externes* les segments BD et AC :

Pour que quatre points en ligne droite soient conjugués harmoniques, il faut et il suffit que le milieu d'un conjoint soit sur son externe et que les distances de ce milieu aux extrémités de l'autre conjoint soient proportionnelles aux produits des distances de chaque extrémité du second aux deux extrémités du premier.

L'étude de cette proposition conduit à d'intéressantes conséquences, dont le lecteur vérifiera aisément l'exactitude.

Pour que quatre points en ligne droite soient conjugués harmoniquement, il faut et il suffit que les milieux des conjoints soient sur les externes et remplissent l'une des conditions suivantes:

1° Que les distances du milieu d'un conjoint, aux extrémités de l'autre, soient proportionnelles aux carrés des deux segments du second :

$$OB.\overline{AC}^2 = OA.\overline{BC}^2 \quad \text{ou} \quad \omega C.\overline{BD}^2 = \omega D.\overline{BC}^2 \ (*)$$

2° Que la distance des milieux des conjoints se trouve divisée en trois segments dont le mitoyen soit moyen proportionnels entre un extrême et le double de l'autre :

$$\overline{BC}^2 = 2.OB.\omega C.$$

3° Que les demi-longueurs des conjoints et la distance de leurs milieux soient les trois côtés d'un triangle rectangle

(*) ω désigne le milieu de AB.

ayant cette distance comme hypoténuse :

$$\overline{O\omega}^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{CD}{2}\right)^2.$$

4° Qu'il y ait conjugaison harmonique entre le milieu d'un conjoint, les deux extrémités de l'autre, et le milieu I de la corde commune aux circonférences décrites sur les deux conjoints comme diamètres

$$OB.AI = OA.BI, \quad \text{ou} \quad \omega C.DI = \omega D.CI$$

QUESTION 266

Solution par M. l'abbé E. Gelin, professeur au Collège Saint-Quirin, à Huy.

Résoudre l'équation

$$(1) \qquad (ax^2 + bx + c)^2 = x^2(Ax^2 + bx + c).$$

(G. L.)

Posons, pour abréger, $A - a + \frac{1}{4} = k^2$, k désignant une expression réelle ou imaginaire.

L'équation (1) devient

$$(ax^2 + bx + c)^2 - x^2(ax^2 + bx + c) + \frac{x^4}{4} = k^2x^4,$$

$$\left(ax^2 + bx + c - \frac{x^2}{2}\right)^2 - k^2x^4 = 0,$$

$$ax^2 + bx + c - \frac{x^2}{2} \pm kx^2 = 0, \text{ etc.....}$$

Nota. — Solutions analogues par MM. Ch. Biermann, ancien élève de l'École polytechnique, ingénieur à Montauban; A. Boutin, professeur au collège de Courdemanche; Ignacio Beyens, capitaine du Génie à Cadix.

QUESTIONS PROPOSÉES

301. — On donne les deux relations

$$\begin{vmatrix} a & a' & x \\ b & b' & y \\ c & c' & z \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a & a' & x' \\ b & b' & y' \\ c & c' & z' \end{vmatrix} = 0;$$

on propose d'en déduire les suivantes

$$\begin{vmatrix} a & x & x' \\ b & y & y' \\ c & z & z' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a' & x & x' \\ b' & y & y' \\ c' & z & z' \end{vmatrix} = 0.$$

(Ch. Hermite.)

302. — Résoudre les équations

$$\frac{x-b-c}{x-2a} + \frac{x-c-a}{x-2b} + \frac{x-a-b}{x-2c} + 1 = 0,$$

$$\frac{2x+c-b}{x+b-c} + \frac{2x+a-c}{x+c-a} + \frac{2x+b-a}{x+a-b} + 2 = 0,$$

$$\frac{x+b+c-a}{x+3a-b-c} + \frac{x+c+a-b}{x+3b-c-a} + \frac{x+a+b-c}{x+3c-a-b} + 1 = 0.$$

. . . .

et reconnaître que la *clef* qui peut servir à former, en nombre indéfini, les équations de ce genre est représentée par l'identité

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)-\alpha\beta(\alpha+\beta)-\beta\gamma(\beta+\gamma)-\alpha\gamma(\alpha+\gamma)-2\alpha\beta\gamma \equiv 0.$$

(G. L.)

REMARQUE. — Avec cette clef on peut aussi obtenir, en nombre indéfini, des équations de second degré donnant des racines commensurables; par exemple

$$\frac{x+a}{b} + \frac{x+b}{a} + \frac{a+b}{x} + 2 = 0,$$

. . . . etc.

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMIN DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 22582-10-8.

DIVISIBILITÉ D'UN NOMBRE

PAR LE PRODUIT DE NOMBRES PREMIERS, FORMANT UN GROUPE DÉFINI

(Application à la détermination des facteurs premiers, diviseurs d'un nombre donné)

Par M. **Loir.**

(*Suite et fin*, voir p. 241.)

Application. — *Déterminer les nombres premiers, diviseurs du nombre* 66 355 761 644 172.

Groupes successivement employées :	*Quotients successifs*
1° $7.11.13 = 1\,001$	
66 355 761 644 172	Quotient par $7.11.13$:
761 472	66 289 472 172
355 289	
66 066	
0	
2° $7.11.13$	
66 289 472 173	Quotient par 7.11 :
6 289 300	$989\,300\,172 \times 13 - 12\,000\,000\,000$
65 989	$= 860\,022\,369$
$-924 = -7.11.13$	
3° $3.23.29 = 2\,001$	
860 902 236	Quotient par $3.23.29$:
860 430	430 236
0	
4° $9.17.19.43 = 125\,001$	$(125 \times 236 = 29\,500)$
430 236	Quotient par $9.17.19$:
$-29\,500$	$236 \times 43 - 10\,000 = 148$
$-29\,070 = -9.17.19.10$	
5° $148 = 2.2.37.$	

Les nombres premiers, diviseurs du nombre donné, sont :

2, 2, 3, 3, 3, 7, 7, 11, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 37.

Remarques. — 1° Si le groupe de nombres premiers était défini, parce que leur produit est terminé par 1. On serait ramené à la question que nous avons traitée, dans le n° du mois de juin de ce journal, sous ce titre : *Caractères de divisibilité d'un nombre par un nombre premier :* 7, 11, 13, 17...

2° Si le groupe de nombres premiers était défini, parce que leur produit est terminé par 01. On verra, facilement, que l'on arriverait à des conséquences théoriques et à une règle pratique, tout à fait analogues à celles qui ont été développées ci-dessus, sur lesquelles il n'est pas nécessaire d'insister. On aurait alors :

31.71 = 2201.	47.83 = 3901.	79.19 = 1501.
37.73 = 2701.	53.17 = 901.	89.9 = 801.
41.61 = 2501.	59.39 = 2301.	97.33 = 3201.
43.7 = 301.	67.3 = 201.	

3° On pourra, afin de rendre plus simples, plus praticables, certaines opérations de la recherche des nombres premiers, diviseurs de l'une des différences obtenues dans le procédé appliqué ci-dessus ; ou bien, encore, pour reconnaître les nombres premiers, diviseurs du dernier quotient, que l'on doit essayer successivement ; on pourra, dis-je, recourir aux procédés déduits des deux remarques précédentes. Ils présentent de très réels avantages.

Ainsi, supposons que l'on ait obtenu 1 067 485, pour dernier quotient de la division d'un nombre, à la suite des essais par les groupes terminés par *001* ; qui ont donné les facteurs premiers, jusqu'à 29 compris. On devra essayer si ce dernier quotient, 1067485, est divisible par les autres nombres premiers, à partir de 31.

Appliquant la méthode de la remarque n° 2, on a :

31.71 = 2201

Il viendra :

22.85 = 1870

10674*85*

1870

88*04*

0

le quotient par 31.71 est *485*, et comme 485 = 5.97, on

joindra 5, 31, 71, 97 aux nombres premiers, déjà trouvés, diviseurs du nombre donné.

Conclusion. — Nous sommes amenés à conclure, que, pour obtenir *tous* les diviseurs premiers, d'un nombre donné, il conviendrait d'utiliser les trois procédés de divisibilité, en considérant les groupes des nombres premiers dont les produits sont terminés, soit par *001*, soit par *01*, soit par *1*.

Application. — *Déterminer tous les nombres premiers, diviseurs du nombre 2 812 604 243 139 405.*

Groupes employés : *Quotients successifs :*

1° *3.11.17.41* = 23 001.

(405.23 = 9 315) 2 812 604 243 139 *405* Quotient par *3.11.17.41* :

9 315

604 233 *824* *122 281 824 405*

18 952

12 585 *281*

6 463

2 806 *122*

2 806

0

2° *3.13.59* = 2 301.

(23.5 = 115) 122 281 824 4*05* Quotient par *3.13.59* :

115

81 812 *9* *53 142 905*

667

2 275 *14*

322

121 9*53*

1 219

0

3° *19.79* = 1501.	53 142 90*5*	Quotient par
(15.5 = 75)	7 5	*19.79* :
	53 1 3*5 4*	*35 405*.
	8 10	
	45 *03*	
	45	
	0	
4° *73.7* = 511.	35 40*5*	Quotient par
(51.5 = 255)	2 55	*73* :
	32 8*5*	55×7+100=*485*=*5.97*.
	25 5	
	7 3=73.1.	

Les nombres premiers, diviseurs, du nombre donné sont : *3, 3*, 5, *11, 13, 17, 19, 41, 59, 73, 79, 97*.

THÉORÈME FONDAMENTAL

DE LA THÉORIE DES MAXIMUMS

(DÉMONSTRATION DE M. DARBOUX)

La démonstration qu'on donne, généralement, du théorème sur le maximum d'un produit de facteurs dont la somme est constante, est insuffisante. On montre, en effet, que le produit peut constamment être augmenté tant qu'il reste deux facteurs inégaux; mais on ne montre pas que le procédé employé pour augmenter le produit le fera converger vers le produit dans lequel tous les facteurs sont égaux; ni, au moins, que ce dernier produit est supérieur à tous les produits dans lesquels se trouvent des facteurs inégaux.

M. Darboux a donné incidemment, dans une leçon professée à la Sorbonne, en 1883, une démonstration claire et rigoureuse, que nous avons, dès ce moment, introduite dans notre ensei-

gnement. Elle nous paraît de nature à être aisément comprise par tous les élèves de Mathématiques élémentaires.

Dans le cas de deux facteurs, l'inégalité connue

$$xy = \frac{1}{4}(x + y)^2 - \frac{1}{4}(x - y)^2$$
$$= \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4}(x - y)^2$$

contient la démonstration du théorème, même si les facteurs sont négatifs. Dans ce qui suit, il est nécessaire de supposer positifs les facteurs; nous désignerons par x, y, z, t, u... des facteurs différents entre eux, en sorte que, dans le cas de deux facteurs, l'égalité rappelée conduit à l'inégalité

$$\text{(A)} \qquad xy < \left(\frac{x + y}{2}\right)^2.$$

Cela posé, soient quatre facteurs x, y, z, t. Nous avons:

$$xy < \left(\frac{x + y}{2}\right)^2,$$
$$zt < \left(\frac{z + t}{2}\right)^2;$$

et, comme les facteurs sont positifs, en multipliant membre à membre, $xyzt < \left(\frac{x + y}{2} \times \frac{z + t}{2}\right)^2.$

Or, toujours d'après (A), on a

$$(x + y)(z + t) < \left(\frac{x + y + z + t}{2}\right)^2.$$

Donc $$xyzt < \left[\frac{\left(\frac{x + y + z + t}{2}\right)^2}{4}\right]^2$$

ou

$$\text{(B)} \qquad xyzt < \left(\frac{x + y + z + t}{4}\right)^4;$$

ce qui démontre le théorème dans le cas de quatre facteurs. Passons au cas de huit facteurs x, y, z, t, u, v, w, p. En vertu de (B), nous avons

$$xyzt < \left(\frac{x + y + z + t}{4}\right)^4,$$
$$uvwp < \left(\frac{u + v + w + p}{4}\right)^4;$$

puis, en multipliant membre à membre,

$$xyztuvwp < \left[\frac{(x+y+z+t)(u+v+w+p)}{16}\right]^4.$$

Or:

$$(x+y+z+t)(u+v+w+p) < \frac{(x+y+z+t+u+v+w+p)^2}{4};$$

donc

$$\text{(C)} \quad xyztuvwp < \left(\frac{x+y+z+t+u+v+w+p}{8}\right)^8.$$

Le théorème est démontré pour huit facteurs, et l'on voit comment la démonstration s'étend à un nombre de facteurs égal à 2^n.

On ramène le cas de m facteurs au cas de la puissance de 2 immédiatement supérieure, de la manière suivante. Soient, par exemple, cinq facteurs tels que

$$x+y+z+t+u=a.$$

Multiplions tous les produits variables par le produit de trois facteurs constants, égaux chacun à $\frac{a}{5}$: nous aurons ainsi huit facteurs ; et l'inégalité (C) sera appplicable.

$$xyztu\left(\frac{a}{5}\right)^3 < \left(\frac{x+y+z+t+u+\frac{3a}{5}}{8}\right)^8,$$

$$< \left(\frac{a+\frac{3a}{5}}{8}\right)^8,$$

$$< \left(\frac{a}{5}\right)^8.$$

En divisant les deux membres de la dernière inégalité par $\left(\frac{a}{5}\right)^3$, il vient

$$xyztu < \left(\frac{a}{5}\right)^5 \ (*).$$

C. Q. F. D.

L. L.

(*) A propos de cette démonstration, fondée sur l'inégalité de Cauchy

$$\sqrt[p]{ab\ \dots\ kl} < \frac{a+b\ \dots\ +k+l}{p},$$

on pourra consulter : 1° le *Cours d'Analyse* de Cauchy, 1821, p. 457 ; 2° la *Correspondance mathématique* de Quetelet, tome IV, p. 169 ; 3° *Nouvelles Annales*, 1842, p. 368 ; 4° notre *Traité d'Algèbre*, p. 208. G. L.

ESSAI
SUR LA
GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. G. de Longchamps.

(SECONDE PARTIE)

(*Suite*, voir p. 252.)

104. Examen d'un cas particulier concernant le problème précédent. — Nous allons supposer maintenant que le but proposé est visible d'un seul point de la région accessible; tel serait, par exemple, un obstacle fortifié B protégé par un bois V; de telle sorte que B soit visible d'un seul point A, à travers une percée du bois.

Soit C le point où l'on veut établir la batterie. On prendra, sur les directions AC, AB, des longueurs AC′, AB′ telles que

$$\frac{AC'}{AC} = \frac{AB'}{AB}.$$

La ligne de visée CZ est parallèle à C′B′, et la distance CB se calcule par la formule

$$CB = C'B'.\frac{AC}{AC'}.$$

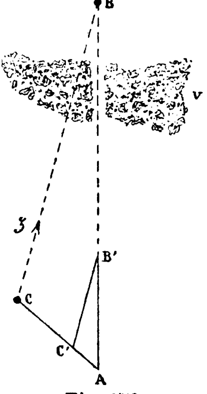


Fig. 278.

Cette solution exige que l'on connaisse la distance AB. Si cette longueur ne peut pas être calculée, il faut alors, pour que la position de B soit déterminée, que l'on puisse indiquer, sur le terrain, deux points P, Q en ligne droite avec B. D'ailleurs, P, Q sont inaccessibles; car, dans l'hypothèse que nous avons faite, B ne peut être aperçu que d'un seul point de la partie accessible. Voici comment on peut résoudre ce cas, l'un des plus difficiles du problème actuel.

Traçons OX perpendiculairement à OB, dans la région

accessible; prenons, sur OX, un point O′ arbitraire, mais tel que les lignes O′P, O′Q passent dans le voisinage du terrain où l'on veut établir le centre d'attaque. Les perpendiculaires

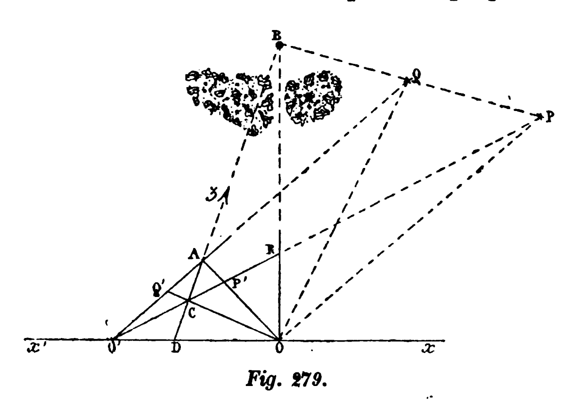


Fig. 279.

OA, OC, élevées aux droites OP, OQ, coupent les lignes OQ, OP en des points A, C; la droite CA est la ligne de tir.

105. Le tir sur un but complètement invisible. — Imaginons, par exemple, que, dans une ville assiégée, on veuille atteindre un point B, invisible dans quelque position qu'on se place; on sait seulement qu'il se trouve placé en ligne droite avec deux couples de points visibles A, C; D, E.

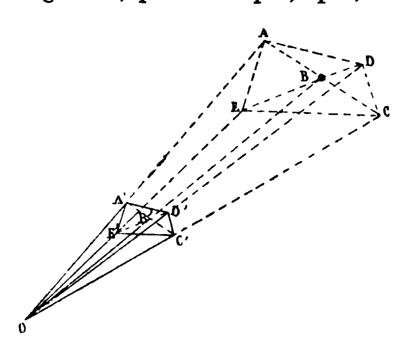


Fig. 280.

La transformation homothétique des figures donne une première solution du problème actuel. Après avoir jalonné, en partant d'un point O, les directions OA, OC, OD, OE; on prend, sur ces droites, des points A′, C′, D′, E′, tels que

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} = \frac{OE'}{OE}.$$

Les lignes A′C′, D′E′ se coupent en un point B′; OB′ est la ligne de visée. OB se calcule d'ailleurs par la formule

$$OB = OB' . \frac{OA}{OA'}.$$

Mais cette solution, très simple en théorie, offrirait dans l'application, certaines longueurs, parce qu'elle exige le calcul préalable des distances OA, OC, OD, OE. Celle que nous allons indiquer, basée sur la transformation homologique, est sensiblement plus pratique.

La transformation à laquelle nous faisons ici allusion est celle que nous avons déjà employée au paragraphe précédent; elle peut se définir ainsi. On prend un angle droit O′Ox; et, sur OO′, un point fixe O′; c'est la figure de référence. Un point M étant donné, le correspondant M′ s'obtient en traçant O′M et en menant la droite OM′, symétrique de OM, par rapport à OX. Cette construction du point M′ peut être facilement réalisée, sur le terrain, avec une fausse équerre.

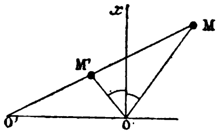


Fig. 281.

Si l'on transforme, par ce procédé, une figure inaccessible,

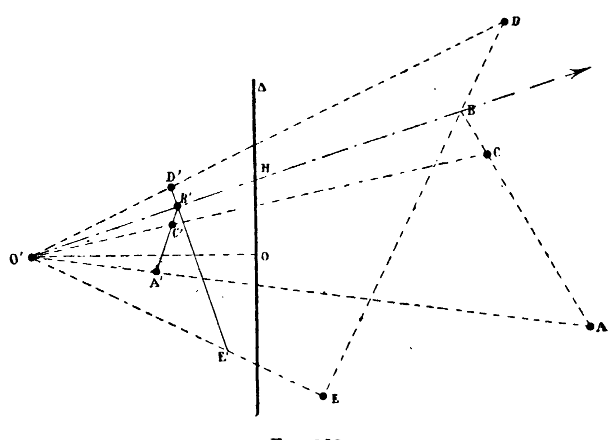


Fig. 282.

et notamment le quadrilatère A, C, D, E dont il a été question plus haut, on obtiendra des points associés A′, C′, D′, E′.

D'ailleurs, dans cette méthode, la transformée d'une droite est une autre droite; de plus, deux points correspondants sont en ligne droite avec le pôle fixe O'. D'après celà, les droites A'C', D'E' se coupent en un point B'; OB' va passer par B; c'est la ligne de visée.

Pour avoir la longueur O'B, on observera que, si OB rencontre l'axe d'homologie en H, la ponctuelle OB'HD est harmonique; on a donc

$$\frac{1}{O'B} = \frac{2}{OH} - \frac{1}{O'B'}.$$

Pour démontrer que les trois points C, A, B sont en ligne droite (*), on peut raisonner de la manière suivante. Les côtés des angles droits BOX, AOP, COP rencontrent PQ en six points formant une involution dont le point central est la projection de O sur PQ. D'autre part, le quadrilatère complet AC, OO', P'Q' donne, lui aussi sur PQ (théorème de Desargues) par ses côtés O'C, OA; OC, O'A; et ses diagonales OO', AC, six points en involution. Dans ces deux ponctuelles en involution, cinq points sont confondus; par conséquent elles coïncident, et l'on peut conclure que AC passe par B.

La longueur de la ligne de tir peut s'obtenir de bien des façons et, notamment, en observant que le rapport anharmonique (D, C, A, B) est égal à celui des points (O' C P' R).

La solution précédente est, comme on le voit, une nouvelle application de la transformation des figures, que nous avons nommée *transformation réciproque* (**); elle exige l'emploi de l'équerre ordinaire. Si l'on ne dispose que d'une fausse équerre, on opérera comme nous allons l'indiquer, en effectuant une transformation homologique de la figure inaccessible.

Soit toujours désigné par B *(fig. 283)* le but qu'il faut atteindre et qui n'est visible que d'un seul point O, lequel ne peut, pour certains motifs, servir de centre d'attaque. Effectuons la construction indiquée par la figure, en supposant

$$Q'OB = QOB, \qquad P'OB = POB.$$

La droite P'Q', ainsi obtenue passe par B. Si l'on ne veut

(*) Cette propriété m'a été communiquée par M. Laurens.

(**) *Journal de Mathématiques spéciales*, 1882, p. 49.

pas, pour reconnaître cette propriété, invoquer les principes de la transformation homologique, il suffira d'observer que les droites OB, OO′ étant les bissectrices des angles formés par les droites OQ′OQ, OP′, OP : les ponctuelles (O′, P′, R, P), (O′, Q′, S, Q) sont harmoniques. Cette remarque une fois faite, un théorème élémentaire bien connu prouve que P′Q′, RS, PQ sont des droites concourantes. On pourra donc installer la batterie en P′ ; P′Q′ sera la ligne de tir.

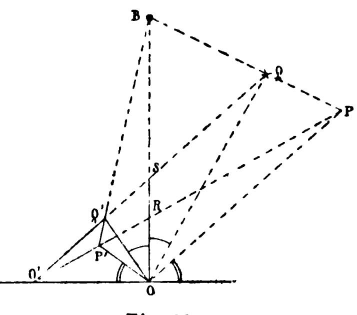


Fig. 283.

Quant à la distance P′B, elle se calculera, si l'on veut, par le procédé indiqué plus haut.

Nous abordons maintenant un cas plus difficile; c'est celui où le but est invisible de tous les points de la partie accessible.

(A suivre.)

SUR LA TERMINOLOGIE

DE LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

Par M. **Poulain.**

La terminologie qui a été proposée dans ce journal (*), et ailleurs, est déjà fort commode. Mais je crois qu'il est important de ne pas la regarder comme fixée d'une manière *définitive*. Si l'on n'accepte pas trop facilement des changements il n'en est pas moins utile d'en discuter quelques-uns (**).

(*) Voyez : *Généralités sur la géométrie du triangle,* par M. G. de Longchamps, *Journal,* 1886, p. 100.

(**) C'est pour cette raison que nous insérons très volontiers la lettre de M. Poulain, bien que nous ne soyons pas partout d'accord avec notre honorable correspondant. C'est ainsi que les mots *points algébriquement*

En voici un qui me paraîtrait utile. Le nom de *points algébriquement associés* est meilleur que ceux qui l'avaient précédé. Mais celui de *points harmoniens* me semble plus avantageux.

---

associés, que nous avons autrefois proposés (*loc. cit.*), et qui se trouvent ici critiqués, nous paraissent pourtant bien choisis.

Je crois que M. Poulain fait erreur en voulant rappeler, par un seul mot, la construction des points en question. D'abord, la chose est impossible; mais en admettant, bien que j'en doute complètement, que l'élève devine, à l'énoncé du mot *harmonien*, la figure formée par un triangle, un point et ses harmoniens; comment appellera-t-on les points complémentaires, anti-complémentaires, supplémentaires, etc., les potentiels, les réciproques de différents ordres, les points isobariques, les points irrationnellement associés, etc ? Trouvera-t-on un mot pour rappeler la situation géométrique des points considérés, relativement au triangle de référence? Il y a là une impossibilité évidente.

Si, au contraire, comme je l'ai fait, on prend pour base du langage de la Géométrie du triangle la comparaison des coordonnées des points, associés à un point donné M, avec celles de M; alors, la terminologie, ainsi créée, possède une base vraiment commode et cette langue nouvelle sera claire et logique; étant entendu, une fois pour toutes, que les mots qu'elle emploie ont pour but de rappeler la loi algébrique liant les coordonnées des points considérés.

M. Neuberg, qui a tant fait pour la Géométrie du triangle, m'avait proposé le terme *points harmoniquement associés*, pour remplacer les mots *algébriquement associés*. Mais ce vocable ne me paraît pas mieux choisi que celui proposé ici par M. Poulain, et pour les mêmes motifs.

Par exemple, je ne vois aucun inconvénient au mot de *Céviennes* mis en avant, plus loin, par M. Poulain. Les Allemands appellent les droites MA, MB, MC, d'après un renseignement que m'a donné M Neuberg, les « *Ecktransversalen des Punktes* M » ce qui se traduit assez bien, d'après lui, par *transversales angulaires de* M. Mais le mot *Céviennes* est plus court; il rappelle un théorème classique; et il pourrait être adopté, sans inconvénient. Quant aux autres expressions proposées par M. Poulain, pour bien des raisons, sur lesquelles je ne crois pas nécessaire d'insister, elles me paraissent moins utiles. Je me bornerai à faire remarquer à M. Poulain, qu'il n'y a qu'une sous-normale; il n'y a, aussi, qu'une sous-tangente; au contraire, une hauteur, par exemple, donne lieu à deux sous-hauteurs. Comment les distinguera-t-on et quel avantage retirera-t-on de ce néologisme? Il n'y a qu'une chose vraiment utile, dans la Géométrie du triangle, c'est le rapport des sous-hauteurs, des sous-bissectrices, etc., situées sur un côté du triangle. Mais ces rapports sont fournis par les coordonnées barycentriques du point correspondant; il n'y a donc aucune utilité apparente à donner des noms à des objets qui ne doivent pas être considérés.

Malgré les observations précédentes, nous avons tenu à insérer intégralement la note de M. Poulain. Le sujet délicat qu'elle aborde comporte en effet d'intéressantes réflexions ; nous avons voulu les provoquer, car il importe de fixer la langue que l'on doit adopter dans cette intéressante étude, chaque jour plus étendue, de la Géométrie du triangle.

(G. L.)

Quelles sont, en effet, les qualités désirables dans un mot nouveau. C'est d'être: 1° court, 2° expressif, 3° fécond. Il faut que le mot soit *expressif* pour *l'élève*, qui n'a pas le temps d'aller longtemps aux renseignements, pour retrouver la signification perdue. Le mot *harmonien* éveillera tout de suite, dans son esprit, l'idée d'un partage harmonique. Sur quoi porte ce partage? Il le devine: c'est sur une transversale issue du sommet C, puisque ces droites sont en jeu continuel dans la Géométrie du triangle, et définissent presque tous les points. C'est donc cette transversale CC′ qui sera partagée.

Au contraire, quand l'élève entend le mot *algébriquement associé*, il voit bien qu'il y a une opération algébrique à faire; mais sur quoi? est-ce sur une transversale usuelle, ou sur certaines coordonnées? Puis, quelle est cette opération algébrique? Est-ce un changement de signe, une addition, une multiplication? Il hésite.

Je crois donc que le mot *harmonien* est plus *suggestif* pour l'élève. Il l'estégalement pour le professeur qui, pendant deux mois, a perdu de vue la Géométrie du triangle; et pour le *profane*, à qui on veut expliquer, en deux mots, de quoi il s'agit. Il suppliera qu'on ne lui décrive pas, tout du long, les divers systèmes de coordonnées, mais qu'on lui fasse savoir, rapidement, de quel point on parle.

J'ajoute que les amateurs de Géométrie pure aimeront un mot qui ne fait pas allusion à un système particulier de coordonnées et se définit par une petite opération qui leur est familière, comme celle d'un partage harmonique. A la vérité, on ne peut pas toujours les satisfaire sous ce rapport et l'on s'en tire comme on peut pour les points *complémentaires* et autres. Mais du moment qu'il y a possibilité, il vaut mieux tenir compte de leurs tendances.

J'ai dit que le mot *harmonien* a un dernier avantage, c'est d'être fécond. Il amène *naturellement* certains dérivés.

Ainsi, les transversales AM′, BM′ s'appelleront les *harmoniennes* de AM, BM. Plus généralement, quand M décrit une ligne, celle que décrit M′ s'appellera son *harmonienne*. L'autre dénomination ne se prêtait pas à ces dérivés, sauf pour le triangle algébriquement associé que j'appelerai triangle harmonien.

Il me semble qu'il serait commode d'avoir un mot spécial et court pour désigner les coordonnées normales. Avec les coordonnées barycentriques et tripolaires, on peut encore s'en tirer, en disant par abréviation : les barycentriques, les tripolaires (ce serait un usage utile à introduire). Mais on ne peut faire une abréviation analogue pour les coordonnées normales. Il serait bon de créer un mot. Il ne faut pas craindre qu'il soit pittoresque, pourvu qu'il soit *court*, *suggestif* et *fécond*. Je n'ose en proposer. Le mot *cathètes*, qui signifie fil à plomb, est assez obscur. Les mots *plombales* ou *équerriennes* effaroucheront peut-être, quoique très clairs. On pourrait recueillir les avis de quelques hommes du métier.

Au risque de paraître trop porté pour les mots nouveaux, j'ajouterai qu'il serait bien commode de donner un nom à certaines droites qui fourmillent dans la nouvelle Géométrie. Ce sont les *transversales menées par les sommets d'un triangle*. Il m'a fallu huit mots pour les désigner. Puisque ces droites font leur première apparition (d'une manière générale) dans le théorème de Céva, il serait naturel de les appeler des *céviennes;* et ce mot très court dirait, bien haut, leur définition. Quand elles seront concourantes en M, elles s'appelleront les céviennes de M. Chaque point remarquable a les siennes. Il y aura donc les céviennes de Steiner, de Nagel, de Jérabek, etc.

Si deux de ces transversales sont remplacées par deux autres, suivant une loi *quelconque*, les nouvelles sont appelées les *cocéviennes* des anciennes. Elles déterminent un point M′ qui est le *cocévien* de M; et quand M se meut sur une ligne, M′ engendre la *cocévienne* de cette ligne.

On a ainsi des transformations *cocéviennes* formant un groupe nombreux, en face du groupe des transformations centrales.

Chaque espèce de cocévienne a un qualificatif qui indique sa loi de formation. Elle sera inverse, réciproque, orthogonale, harmonique, etc.; ou encore on la désignera par le nom de l'espèce de point qu'elle est destinée à donner. Ainsi les cocéviennes isobariques aboutissent à l'isobarique de M. On fera de même pour les points complémentaires, supplémentaires, potentiels, brocardiens, etc. Voilà un moyen rapide de désigner des transversales usuelles qui n'avaient pas de nom.

En Géométrie analytique, on appelle sous-tangentes et sous-normales des segments issus des pieds des tangentes et normales. Rien n'empêche d'étendre cette formation de mots aux segments déterminés par *toute* droite sur les côtés du triangle de référence. On dira : les sous-bissectrices, les sous-hauteurs, les sous-plombales, les sous-newtoniennes et même les *sous-segments des droites* de Gergonne, de Lemoine, etc. (on osera peut-être même dire plus rapidement : les sous-droites).

Au fond, je n'ai proposé que trois mots nouveaux ; ils servent à exprimer une quantité d'idées usuelles, d'une manière si simple, qu'elle dispense d'explication.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur au Collège de Courdemanche.

(*Suite*, voir, p. 222.)

---

86. — On a, entre les angles a, b, c, d d'un quadrilatère quelconque, les relations :

$$1^\circ \sin a + \sin b + \sin c + \sin d = 4 \sin \frac{b+d}{2} \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{c+d}{2};$$

$$2^\circ \sin a + \sin b - \sin c - \sin d = 4 \sin \frac{c+d}{2} \cos \frac{b+d}{2} \cos \frac{a+d}{2};$$

$$3^\circ \cos a + \cos b + \cos c + \cos d = 4 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{b+d}{2} \cos \frac{a+d}{2};$$

$$4^\circ \cos a + \cos b - \cos c - \cos d = 4 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{b+d}{2} \sin \frac{b+c}{2};$$

$$5^\circ \sin \frac{a}{2} + \sin \frac{b}{2} + \cos \frac{c}{2} + \cos \frac{d}{2} = 4 \sin \frac{a+b}{4} \cos \left(45^\circ - \frac{b+d}{4}\right) \cos \left(45^\circ - \frac{b+c}{4}\right);$$

$$6^\circ \sin \frac{a}{2} + \sin \frac{b}{2} - \cos \frac{c}{2} - \cos \frac{d}{2} = 4 \sin \frac{a+b}{4} \cos \left(45^\circ + \frac{a+d}{4}\right) \cos \left(45^\circ + \frac{b+d}{4}\right);$$

7° $\dfrac{\sin a+\sin b+\sin c+\sin d}{\sin a+\sin b-\sin c-\sin d}+\operatorname{tg}\dfrac{b+d}{2}\operatorname{tg}\dfrac{b+c}{2}=0$;

8° $\dfrac{\sin a+\sin b+\sin c+\sin d}{\cos a+\cos b+\cos c+\cos d}=\operatorname{tg}\dfrac{b+d}{2}\operatorname{tg}\dfrac{b+c}{2}\operatorname{tg}\dfrac{c+d}{2}$;

9° $\dfrac{\sin a+\sin b-\sin c-\sin d}{\cos a+\cos b-\cos c-\cos d}=\operatorname{cotg}\dfrac{b+d}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{b+c}{2}\operatorname{tg}\dfrac{c+d}{2}$;

10° $\dfrac{\cos a+\cos b+\cos c+\cos d}{\cos a+\cos b-\cos c-\cos d}=\operatorname{cotg}\dfrac{b+d}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{b+c}{2}$;

11° $2\sum\cos^4 a-\left(\sum\cos^2 a\right)^2+4\sum\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c$

$$=4\cos a\cos b\cos c\cos d\left(\sum\cos^2 a-1\right);$$

12° $\sum\operatorname{tg} a=\sum\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b\operatorname{tg} c$;

13° $\sum\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}=\sum\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{b}{2}\operatorname{tg}\dfrac{c}{2}$;

14° $\sum\operatorname{tg}\dfrac{a}{4}\operatorname{tg}\dfrac{b}{4}=1+\operatorname{tg}\dfrac{a}{4}\operatorname{tg}\dfrac{b}{4}\operatorname{tg}\dfrac{c}{4}\operatorname{tg}\dfrac{d}{4}$;

15° $\sum\operatorname{cotg}\dfrac{ka}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{kb}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{kc}{2}=\sum\operatorname{cotg}\dfrac{ka}{2}$;

k entier positif.

16° $\sum\operatorname{cotg}\dfrac{a}{4}\operatorname{cotg}\dfrac{b}{4}=1+\operatorname{cotg}\dfrac{a}{4}\operatorname{cotg}\dfrac{b}{4}\operatorname{cotg}\dfrac{c}{4}\operatorname{cotg}\dfrac{d}{4}$.

87. — x, y, z étant les coordonnées normales d'un point quelconque M du plan d'un triangle; les angles BAM $=\alpha$, CAM $=\alpha'$, MBA $=\beta'$, MBC $=\beta$, BCM $=\gamma'$, ACM $=\gamma$; et les angles BMC, AMC, AMB, sont donnés par les formules :

$$\operatorname{cotg}\alpha=\frac{y}{z\sin A}+\operatorname{cotg} A,$$

$$\operatorname{cotg}\alpha'=\frac{z}{y\sin A}+\operatorname{cotg} A,$$

$$\operatorname{cotg}\beta=\frac{z}{x\sin B}+\operatorname{cotg} B,$$

$$\operatorname{cotg}\beta'=\frac{x}{z\sin B}+\operatorname{cotg} B,$$

$$\cotg \gamma = \frac{x}{y \sin C} + \cotg C,$$

$$\cotg \gamma' = \frac{y}{x \sin C} + \cotg C.$$

$$-\cotg BMC = \frac{R}{S}\left(\frac{yz}{x} + z\cos C + y\cos B - x\cos A\right);$$

$$-\cotg AMC = \frac{R}{S}\left(\frac{xz}{y} + z\cos C + x\cos A - y\cos B\right);$$

$$-\cotg BMA = \frac{R}{S}\left(\frac{xy}{z} + x\cos A + y\cos B - z\cos C\right).$$

R, S désignent le rayon du cercle circonscrit et l'aire de ABC.

Soient $MA_1 = x, \quad MB_1 = y.$
On a : $BC_1 = z \cotg \beta'.$
Projetant, sur MA_1, le contour MA_1BC_1M, on a :

$$x = BC_1 \sin B - z \cos B = z \cotg \beta' \sin B - z \cos B;$$

d'où l'on tire $\cotg \beta'$. On a, de même, les cinq autres formules. Puis

$$-\cotg BMC = \cotg(\beta + \gamma') = \frac{\cotg \beta \cotg \gamma' - 1}{\cotg \beta + \cotg \gamma'}.$$

En tenant compte des valeurs trouvées précédemment, on arrive aux trois dernières formules.

88. — On a entre les angles α, β, γ, α', β', γ' (exercice précédent) la relation :

$$(\cotg \alpha - \cotg A)(\cotg \beta - \cotg B)(\cotg \gamma - \cotg C)$$
$$= (\cotg \alpha' - \cotg A)(\cotg \beta' - \cotg B)(\cotg \gamma' - \cotg C)$$

On peut observer que cette relation n'est pas distincte de la relation bien connue :

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma',$$

laquelle exprime que les droites MA, MB, MC sont concourantes.

BIBLIOGRAPHIE

Essai d'une théorie rationnelle des Sociétés de Secours mutuels, par M. PROSPER DE LAFFITE, ancien Élève de l'École Polytechnique, Vice-Président de la Société de Secours mutuels d'Astaffort. Grand in-8; 1888. (Gauthier-Villars, éditeur, 55, quai des Grands-Augustins.)

QUESTIONS D'EXAMENS

(SAINT-CYR 1888)

4. — Démontrer que l'on a, quel que soit le nombre entier n :
$$2.6.10.14...(4n-6)(4n-2)=(n+1)(n+2)...(2n-1)2n \text{ (*)}.$$

Cette question est proposée, à titre d'exercice, dans notre *Traité d'Algèbre* (p. 11). On reconnait facilement l'identité, *pour des valeurs entières et positives de n*, des deux expressions proposées
$$A = 2.6.10.14 \ldots (4n-6)(4n-2),$$
$$B = (n+1)(n+2) \ldots (2n-1)2n,$$
en observant que l'on a
$$A = 2^n.1.3.5.7 \ldots (2n-3)(2n-1);$$
d'où
$$A.1.2 \ldots n = (2.4.6 \ldots 2n)[1.3.5 \ldots (2n-1)].$$
Cette égalité donne
(1) $$A.1.2 \ldots n = 1.2.3.4 \ldots (2n-1)2n.$$
Or,
(2) $$B.1.2 \ldots n = 1.2.3 \ldots n.(n+1) \ldots (2n-1)2n.$$
Les relations (1) et (2) prouvent que $A = B$.

5. — Démontrer (Recueil cité, p. 177) que
$$nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1,$$
est exactement divisible par $(x-1)^2$ (**).

Il suffit, conformément à la méthode générale, d'essayer la division indiquée. On trouve que cette division se fait exactement et donne, pour quotient,
$$nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 1.$$

6. — Démontrer que l'équation
$$(x-a)(x-b) - c^2 = 0,$$
a ses racines réelles. Peut-elle avoir ses racines égales et de signes contraires ?

On applique le théorème des substitutions, qui donne le tableau suivant :

$-\infty$	a ou b	$+\infty$
$+$	$-$	$+$

etc.

(*) Énoncé rectifié. Voyez le Recueil de la librairie Croville, Morant (p. 53). Il porte, par erreur, $4n+2$. au lieu de $4n-2$; et, par omission, les mots essentiels *entier*, *positif* ne sont pas exprimés.

(**) Voyez *Leçons d'Algèbre élémentaire*, par C. Vacquant, p. 71.

L'équation considérée a deux racines égales et de signes contraires quand on a

$$a + b = 0.$$

Cette condition est nécessaire et suffisante.

7. — Résoudre l'équation

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x.$$

On a

$$2x = x + k\pi,$$

ou

$$x = 0,\ \pi,\ 2\pi, \ldots$$

Nous indiquons ici cette question très simple parce qu'elle se rencontre, sous des formes diverses, dans un certain nombre d'examens, et surtout parce qu'elle n'est pas toujours traitée, par les candidats, avec la simplicité qu'elle comporte.

Voici d'autres exemples du même genre.

1° *Résoudre l'équation*

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} 2x}. \qquad (\textit{Recueil cité}, \text{ p. } 43.)$$

On observe que cette équation peut se mettre sous la forme

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

On a donc

$$2x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi,$$

etc.

2° Une forme générale d'équations trigonométriques, renfermant, comme cas particulier, les exercices précédents, est la suivante :

(1) $$\operatorname{tg}(\alpha x + \beta)\operatorname{tg}(\alpha' x + \beta') = 1.$$

Pour résoudre cette équation, on ne doit pas développer $\operatorname{tg}(\alpha x + \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha' x + \beta')$, par les formules connues ; il est préférable d'observer que (1) donne

$$\operatorname{tg}(\alpha x + \beta) = \operatorname{cotg}(\alpha' x + \beta') = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha' x - \beta'\right),$$

d'où

$$\alpha x + \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha' x - \beta' + k\pi \ ;$$

etc.

8. — Démontrer que $n(n+1)(2n+1)$ est toujours divisible par 6 ; n désignant un nombre entier quelconque.

Cette question est très connue. En voici une du même genre, mais un peu moins évidente : n étant entier, démontrer que

$$n(n^2 + 5)$$

est toujours divisible par 6.

(A suivre.)

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

SESSION DE NOVEMBRE 1888

MARSEILLE

1. — Expliquer sur une figure où sont les extrémités des arcs x qu satisfont à l'inégalité

$$2 \sin^2 x - 11 \sin x + 5 < 0.$$

2. — Calculer le rayon et la hauteur d'un cône ayant même surface totale qu'une sphère de rayon R et dont le volume soit $\frac{1}{n}$ du volume de cette sphère.

BACCALAURÉAT ÈS-SCIENCES COMPLET

SESSION DE NOVEMBRE 1887

ACADÉMIE D'ALGER

Mathématiques.

1. — La déclinaison du Soleil étant de 18° nord, on demande la longueur de l'ombre, à midi vrai, d'un arbre qui aurait 25 mètres de hauteur, en un lieu dont la latitude sud serait de 20 degrés.

2. — Une droite AB fait, avec l'horizon, un angle de 30° et a une longueur de 100 mètres. On demande le temps que mettra, pour la parcourir un point matériel abandonné, sans vitesse initiale, au point le plus haut.

3. — Le point A restant fixe et étant situé à une distance a d'une droite verticale indéfinie PQ, on demande quelle doit être la position du point B, sur cette droite, pour que la ligne AB soit parcourue dans les mêmes conditions que dans la question précédente en un temps donné t? — Discussion. — Quelle doit être la position du point B pour que ce temps soit le plus petit possible?

ACADÉMIE DE PARIS

1. — 1° Calculer la surface d'un triangle rectangle, connaissant les longueurs r et R des rayons du cercle inscrit et du cercle circonscrit au triangle.

2° Prouver que la somme des faces d'un angle polyèdre convexe est plus petite que quatre angles droits.

2. — 1° Étant donné un demi-cercle ACB, mener une corde DE, parallèle au diamètre AB, et telle, que les surfaces engendrées par les deux droites DE et EB, tournant autour de AB, soient dans un rapport donné λ. Discuter.

2° Avec quelle vitesse faut-il lancer verticalement, de bas en haut, un mobile pesant, pour qu'il s'élève à une hauteur de 60^m? Quelle sera la vitesse de ce mobile au moment où il sera à 20^m du sol, soit en montant, soit en descendant?

3. — 1° On demande de calculer les rayons des deux bases d'un tronc de cône. On donne l'apothème a, la surface totale, qui est égal à m fois la surface d'un cercle ayant a pour diamètre, et l'angle, égal à 60°, que fait l'apothème avec le plan de la grande base.

2° Dans un trièdre, une face quelconque est plus petite que la somme des deux autres.

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

DES JEUNES FILLES

ORDRE DES SCIENCES — CONCOURS DE 1887

Mathématiques.

1. — Définition du logarithme d'un nombre. Propriétés communes à tous les systèmes de logarithmes.

2. — On donne deux droites rectangulaires OX, OY, et sur OX un point A défini par $OA = a$; et l'on considère un triangle rectangle ABC, dont le sommet de l'angle droit est en B sur OY, l'un des deux autres sommets étant en A, et l'autre C dans l'angle XOY. Calculer les deux côtés de l'angle droit BC, BA, sachant: 1° que l'aire du triangle est équivalente à celle du carré construit sur OA ; 2° que le volume qu'engendre ce triangle, en tournant autour de OY, est dans un rapport donné m avec celui d'une sphère de rayon OA. On déterminera entre quelles limites m doit être compris, et on vérifiera les valeurs de BA et BC qui correspondent aux valeurs extrêmes de m.

QUESTION 260

Solution par M. l'abbé E. Gelin, professeur au Collège Saint Quirin à Huy.

Si les racines de l'équation du quatrième degre

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = o,$$

sont en progression arithmétique :

1° *La raison* r *est donnée par la formule*

$$r = \pm \frac{1}{10}\sqrt{15a^2 - 40b};$$

2° *Les deux termes extrêmes sont les racines de l'équation*

$$40x^2 + 20ax - 11a^2 + 36b = 0;$$

3° *Les deux termes du milieu sont les racines de l'équation*

$$40x^2 + 20\,ax + a^2 + 4b = 0.$$

(G. Russo.)

1° Soient x, $x + r$, $x + 2r$, $x + 3r$ les quatre racines. En exprimant que la somme de ces quatre racines est égale à a, et que la somme de leurs produits deux à deux est égale à b, on a :

$$4x + 6r = -a,$$
$$6x^2 + 18\,rx + 11\,r^2 = b.$$

On tire de là, en éliminant x

$$r = \pm \frac{1}{10}\sqrt{15a^2 - 40b}.$$

2° et 3°. Les quatre racines de l'équation sont :

$$x = \frac{-5a \mp 3\sqrt{15a^2 - 40b}}{20}, \quad x + r = \frac{-5a \mp \sqrt{15a^2 - 40b}}{20},$$

$$x + 3r = \frac{-5a \pm 3\sqrt{15a^2 - 40b}}{20}, \quad x + 2r = \frac{-5a \pm \sqrt{15a^2 - 40b}}{20}.$$

On tire, de là :

$$x + (x + 3r) = -\frac{a}{2}. \qquad (x + r) + (x + 2r) = -\frac{a}{2},$$

$$x(x + 3r) = \frac{-11a^2 + 36b}{40}, \quad (x + r)(x + 2r) = \frac{a^2 + 4b}{40}.$$

Donc x et $x + 3r$ sont les racines de l'équation

$$(1) \qquad x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{-11a^2 + 36b}{40} = 0,$$

et $x + r$ et $x + 2r$ sont les racines de l'équation

$$(2) \qquad x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{a^2 + 4b}{40} = 0.$$

Remarque. — On peut rechercher les équations de condition que doivent vérifier les coefficients a, b, c, d, dans l'hypothèse actuelle.

Si l'on appelle p la somme des deux termes extrêmes, et q

leur produit; p la somme des deux termes du milieu et r leur produit, on a encore

$$2p = a,\quad p^2 + q + r = b,\quad p(q + r) = -c,\quad qr = d;$$

d'où $$p = -\frac{a}{2},\quad q + r = \frac{c}{a},\quad qr = d,$$

ou $$p = -\frac{a}{2},\quad qr = \frac{c}{2a} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4a^2} - d}\cdot$$

Les deux termes extrêmes et les deux termes du milieu sont donc les racines de la double équation

$$(3)\qquad x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{c}{2a} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4a^2} - d} = 0\cdot$$

Si l'on identifie les équations (1) et (2) avec l'équation (3), on a les équations de condition :

$$\frac{-11a^2 + 36b}{40} = \frac{c}{2a} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4a^2} - d},$$

$$\frac{-a^2 + 4b}{40} = \frac{c}{2a} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4a^2} - d},$$

ou, en ajoutant et en multipliant,

$$\frac{-a^2 + 4b}{4} = \frac{c}{a},\qquad \frac{(-11a^2 + 36b)(a^2 + 4b)}{1600} = d.$$

NOTA. — Solutions analogues par MM. Ignacio Beyens et Boutin.

M. Boutin examine, à cette occasion, le cas où les racines d'une équation de degré m sont en progression arithmétique et il observe avec raison que, dans cette hypothèse, l'équation donnée est *quadratique*, c'est-à-dire qu'elle est résoluble au moyen d'équations du second degré. La question est d'ailleurs très connue ; elle est traitée, si je me rappelle bien, dans l'*Algèbre* de Todhunter; mais la démonstration exige les premiers principes de la théorie générale des équations; pour ce motif, il nous faut ici nous borner au cas de l'équation du quatrième degré.

Le cas du troisième degré, et aussi celui du cinquième degré, peuvent encore être signalés comme donnant lieu à des exercices élémentaires intéressants; mais, dans tous les cas, les équations considérées sont quadratiques.

Pour l'équation générale de degré impair, je renverrai le lecteur à mon *Traité d'Algèbre* (p. 401).

Dans le cas de l'équation du troisième degré, l'identité

$$x^3 - ax^2 + bx - c \equiv (x - \alpha)(x - \alpha - h)(x - \alpha - 2h),$$

donne $$a = \alpha + \alpha + h + \alpha + 2h,$$

ou $$\alpha + h = \frac{a}{3}\cdot$$

Ainsi, $\frac{a}{3}$ est une racine de l'équation donnée.

Pour le cinquième degré, l'identité

$$x^5 - ax^4 + \ldots \equiv (x - \alpha)\ldots(x - \alpha - 4h),$$

donne $$a = 5\alpha + 10h,$$

ou

$$\alpha + 2h = \frac{a}{5}.$$

$\frac{a}{5}$ est donc une racine de l'équation considérée.

Après avoir supprimé cette racine, le quotient

$$\left(\frac{x^5 - ax^4 + \ldots}{x - \frac{a}{5}}\right)$$

égalé à zéro, donne une équation du quatrième degré; je dis qu'elle est quadratique.

En effet, l'identité

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D \equiv (x - \alpha)(x - \alpha - h)(x - \alpha - 3h)(x - \alpha - 4h)$$

peut s'écrire

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = [x^2 - 2x(\alpha + 2h) + \alpha(\alpha + 4h)]$$
$$[x^2 - 2x(\alpha + 2h) + (\alpha + h)(\alpha + 3h)].$$

On en déduit

$$(1) \qquad \alpha + 2h = \frac{A}{4};$$

et, en posant

$$z = x^2 - \frac{Ax}{2},$$

on obtiendra une équation du second degré, en z.

On peut aussi, si l'on préfère cette marche, observer que

$$(2) \qquad B = \alpha(\alpha + 4h) + (\alpha + h)(\alpha + 3h) + 4(\alpha + 2h)^2$$

et résoudre, par rapport à α, h les égalités (1), (2). G. L.

QUESTION PROPOSÉE

303. — On donne une sphère et un point fixe S. On coupe la sphère par un plan (P), et l'on prend le petit cercle d'intersection, ainsi obtenu, comme directrice d'un cône qui a S pour sommet. Ce cône coupe de nouveau la sphère suivant un petit cercle dont le plan est (Q). Démontrer que si l'on fait varier le plan (P), de façon qu'il passe par un point fixe, le plan (Q) passe aussi toujours par un même point. *(Mannheim.)*

ERRATA. — 1° Page 49, 9me ligne en remontant, *au lieu de* « point », *lisez* « plan ». — 2° Page 212, *au lieu de* question 224, *lisez* question 244. — 3° Page 259, dernière ligne, *au lieu de* $\frac{\pi}{1}$, *lisez* $\frac{\pi}{2}$.

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMIN DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 24788-11-8.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Supplément au numéro de janvier.

Concours divers.

Bibliographie.

Questions diverses.

Questions proposées.

273 à 303.

Questions résolues.

211, 233, 213, 214, 215, 209, 216, 217, 218, 219, 221, 240 (p. 50), 241 (p. 75), 223, 220, 222, 224, 228, 226, 253, 227, 262, 231, 234, 244, (marquée 224 par erreur), 232, 235, 243, 236, 237, 239, 245, 246, 247, 249, 250, 251, 252, 254, 255, 256, 259, 265, 266, 269

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS